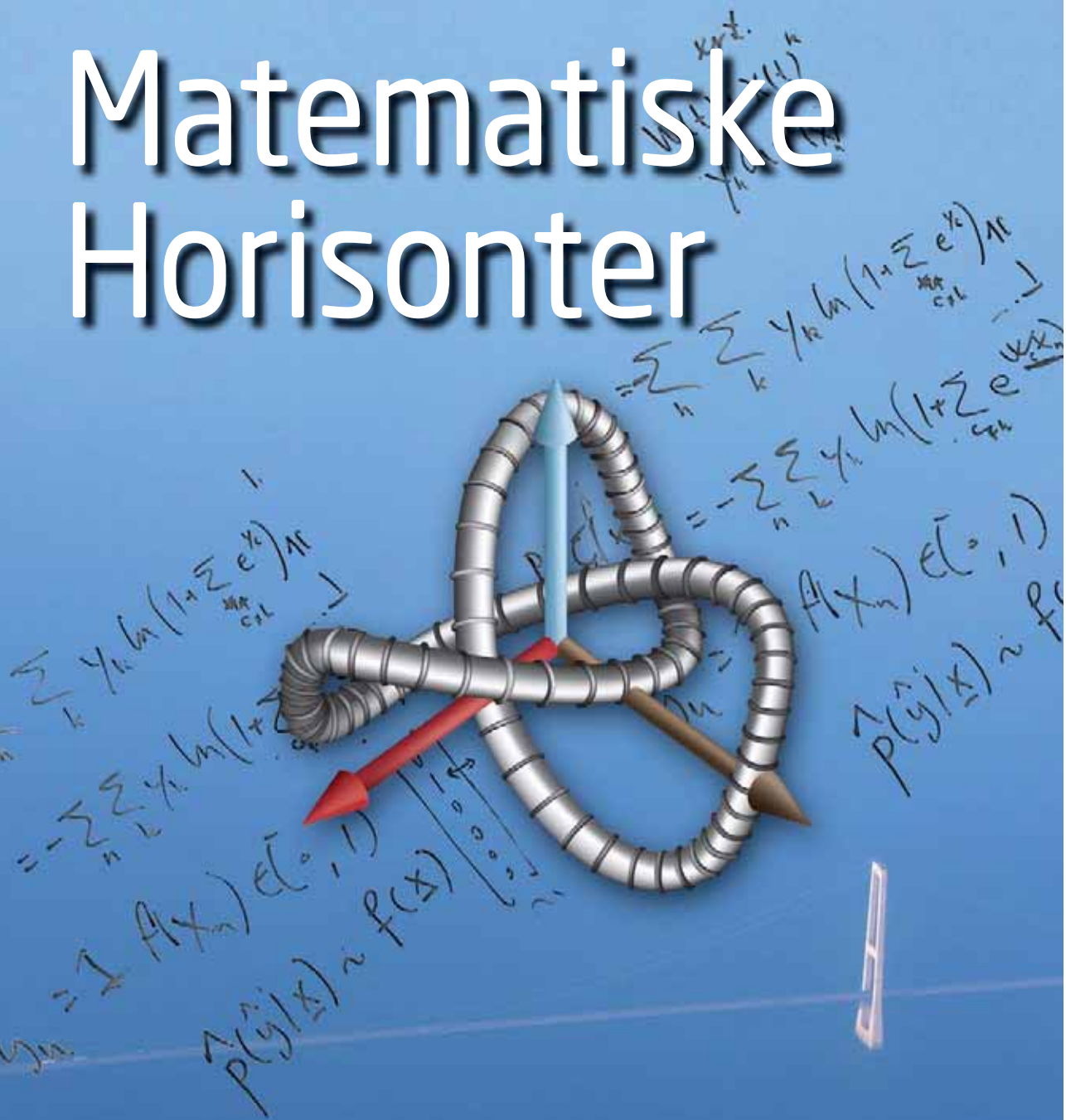
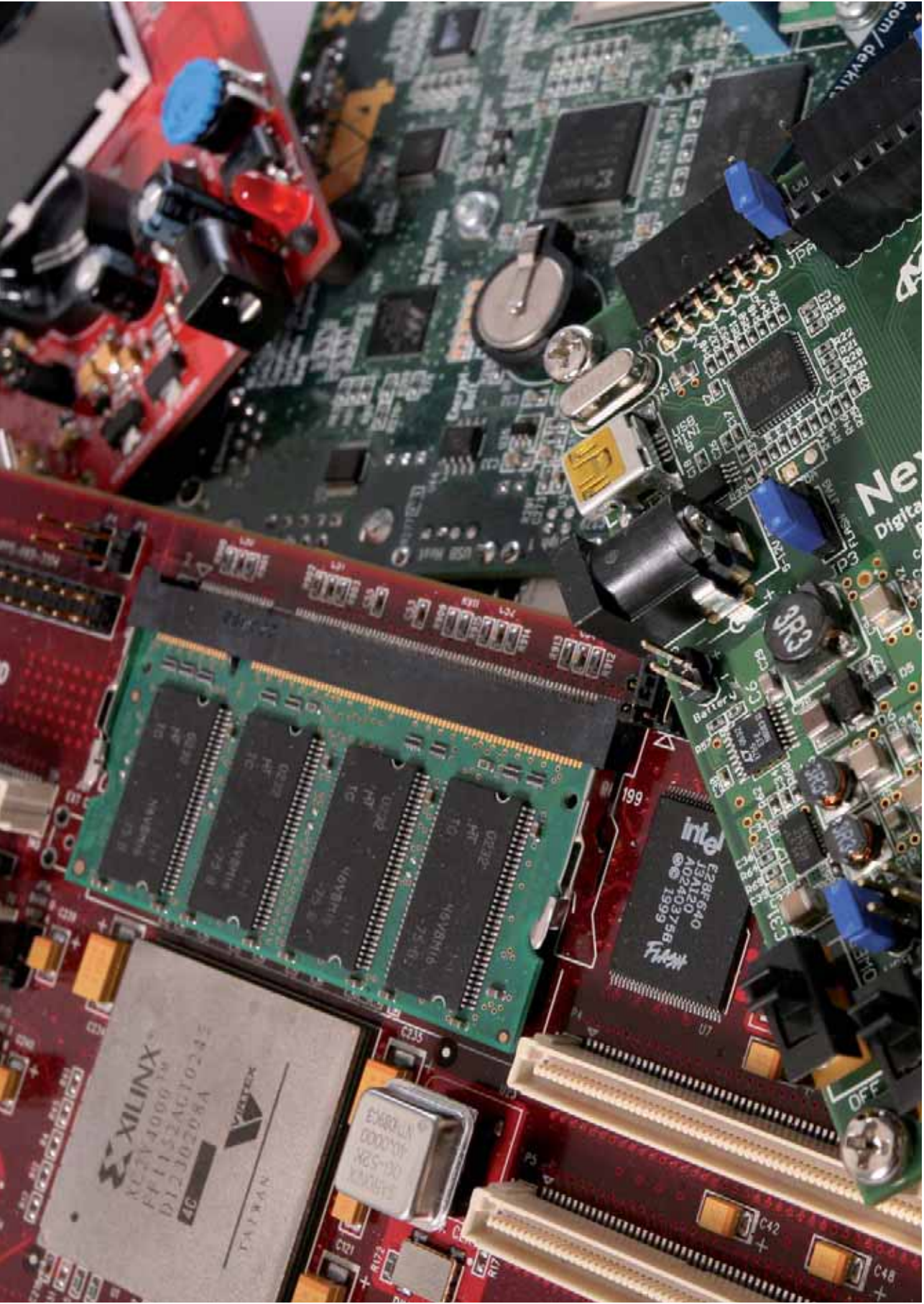


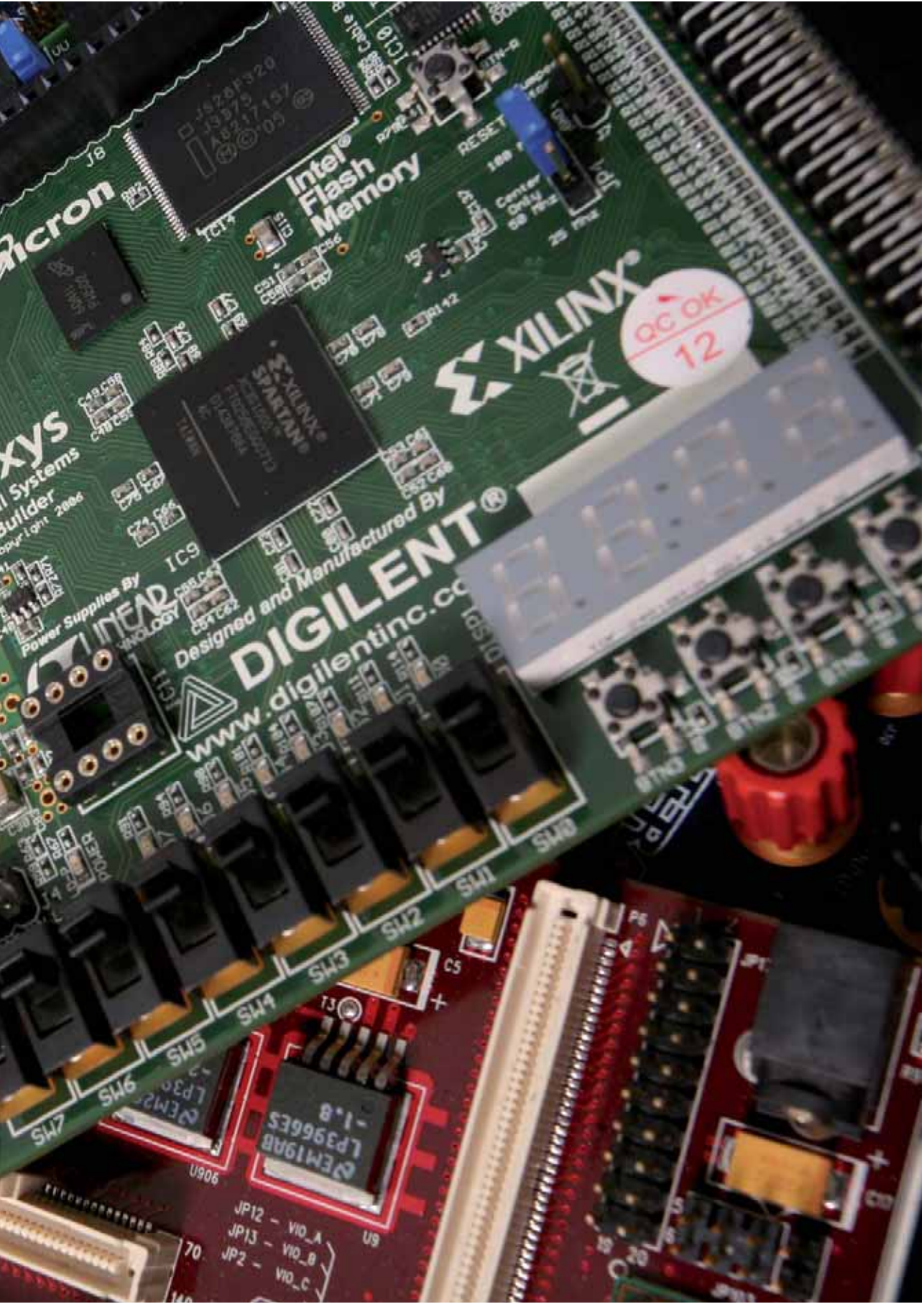
Matematiske Horisonter



Matematiske Horisonter







micron

Intel
Flash
Memory

XILINX

QC OK
12

xy
Systems
builder
2006

Designed and Manufactured By
DIGILENT®
www.digilent.com

Power Supplies By
LINEAR TECHNOLOGY

LP3966ES
-1.8

JP12 - VIO_A
JP13 - VIO_B
JP2 - VIO_C



Stor tak til

Undervisningsministeriets tips- og lottomidler
for støtte til bogen

Tak til

Fagkonsulenterne Bjørn Grøn og Marit Hvalsøe Schou,
Undervisningsministeriet, Afdelingen for gymnasiale
uddannelser

For 25.000 år siden sad der måske en mand på den afrikanske savanne og smed med nogle småsten, mens han ventede på, at middagsheden blev overstået, så han kunne fortsætte jagten. Det kan tænkes, at han pludselig opdagede et mønster i stenene på jorden foran sine fødder, og den forhistoriske mand glemte nu alt om antilopen, hvis spor han havde fulgt. Han begyndte at flytte rundt på stenene og så, at hvis han lagde stenene i et særligt mønster, dannede de samme grundsnit som de overdækkede halvtage, hans stamme brugte som ly for natten. Muligvis kaldte han derefter på stammens andre medlemmer og forklarede, at hvis man kunne lave en præcis stenskitse af et halvtag og med grene måle mønstrets sidelængder i forhold til hinanden, kunne man benytte disse mål til at bygge et meget bedre halvtag end tidligere. Verdens første hytte konstrueret efter geometriske principper blev opført få uger senere.

Idéen om matematik kan være opstået som en sådan tilfældig idé hos en særligt visionær person i et forhistorisk samfund. Det kan også tænkes at evnen til matematisk analyse er kodet i vores gener, så man blot behøver at se en bunke sten for at udtænke en geometrisk figur. Vi ved det ikke, men selvom matematikkens tidligste oprindelse forbliver et mysterium, ved vi dog, at matematik altid har været forudsætningen for menneskets fremskridt. Verdens tidligste landbrugssamfund anvendte matematik til at forædle kulturplanter og til at organisere de dyrkede arealer. De gamle egyptere, babylonier og grækere byggede pyramiderne og de øvrige af oldtidens vidundere ved hjælp af matematik, og søfolk har gennem historien sejlet på klodens oceaner for at udforske, handle, emigrere eller søge rigdomme, ligeledes ved hjælp af matematik. Det syntes at være en rimelig påstand, at vores arts enestående succes på jorden ganske enkelt skyldes vores evne til at forstå og udnytte matematikkens muligheder.

I dag forbinder de fleste matematik med de nyeste landvindinger inden for computervidenskab, rumfart og kommunikation, og på disse felter står den matematiske forskning da også særdeles stærkt. Matematik har imidlertid langt større og mere omfattende betydning end som motor i den højteknologiske udvikling. Faktisk er matematik til stede overalt i vores hverdag. Vores fødevarerproduktion, sundhedssektor, uddannelsessystem, transport og energiforsyning ville eksempelvis ophøre med at eksistere, hvis man fjernede matematikken. Matematiske horisonter viser og gennemgår mange eksempler på matematikkens talrige muligheder og på forskningens enorme perspektiver. Vi håber, at du med denne bog selv vil opdage overraskende eksempler på, hvad matematikkens gør for dig og din hverdag, og at du får inspiration til at gå endnu dybere på opdagelse i matematikkens fascinerende univers.

Kaj Madsen
Instituddirektør, DTU Informatik

Lars R. Knudsen
Instituddirektør, DTU Matematik

Redaktion:

Carsten Broder Hansen
Per Christian Hansen
Vagn Lundsgaard Hansen
Mette Minor Andersen

Fotos:

Carsten Broder Hansen

Layout og grafik:

Grethe Kofoed, Artcome

Tryk:

Svendborgtryk

ISBN: 978-87-643-0453-4

Indhold

Matematik	Matematik igennem millenier
8	Matematik i støbeskeen 1
22 Evolutionens matematik	
36	Matematik i støbeskeen 2
50 Brand!	
62 Hvordan virker en colaautomat?	
80 Wavelets	
88	Europæisk matematik fra renessancen til 1900-tallet
104 Da de hemmelige koder blev offentlige	
114 Matematik i medicinudvikling	
132 Hvorfor kører Michael Rasmussen så hurtigt op ad bakke? Og hvorfor vinder Tom Boonen spurterne?	
140 Kvinder og matematik	
154	Matematik i det tyvende århundrede
162 Fejlrettende koder	
174 Øl og fladskærme	
188 Matematikken i computerens verden - computeren i matematikkens tjeneste	
202 Operationsanalyse - the science of the better	
218 Logik, computere og kunstig intelligens	
234 Matematisk modellering af klima og energi	
246 Mission til Mars	
268 Når matematikken tager form	



MATEMATIK IGENNEM MILLENNIER

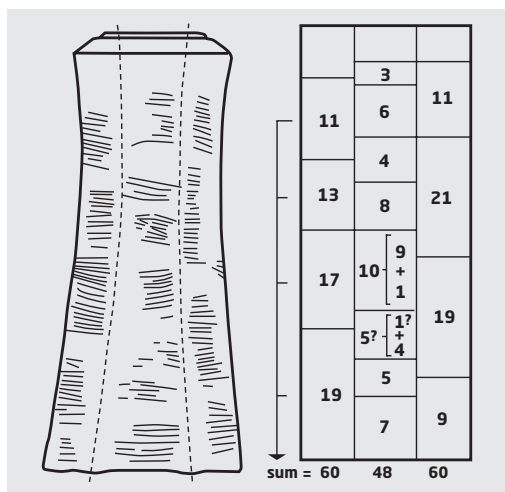
Matematik i støbeskeen 1



Matematikens begyndelse strækker sig langt tilbage i tiden. Nøjagtigt hvor langt er svært at afgøre, men der kendes genstande med antydning af matematiske aktiviteter, der er mange tusinde år gamle. Matematikken har udviklet sig ujævnt igennem disse årtusinder. Nogle forholdsvis korte tidsrum, hvor nye opdagelser blev gjort, har efterfulgt lange perioder med beskedne matematisk aktivitet. Siden den videnskabelige revolution i det sekstende og det syttende århundrede har matematikken dog oplevet en konstant markant vækst, og den matematiske metode er i dag anerkendt som en helt afgørende forudsætning for den moderne civilisation.

Ishango-knoglen - matematik for 20.000 år siden

Matematik har sit udspring i menneskehedens tidlige behov for at tælle og måle i forbindelse med både størrelser og rumlige objekter. Et interessant tidligt matematisk artefakt blev i 1960 fundet ved bredden af Edwardsøen på grænsen mellem Uganda og Congo og kendes som *Ishango-knoglen*. Knoglen har fået sit navn efter et lille kulturfolk – Ishango-folket – som levede på dette sted i forhistorisk tid. Knoglen er med kulstof 14-metoden dateret til at være omkring tyve tusinde år gammel. Ishangomennesket har tilsyneladende lavet udskæringer i knoglen efter en slags mønster, men det er ikke klart, hvad stregerne eller mærkerne på knoglen præcist repræsenterer. Udskæringerne er højst sandsynlig blot en række af tal, men muligvis er der også lavet noget egentlig aritmetik på knoglen. Det er også blevet foreslået, at knoglen kan have været en månekalender, men det forbliver alt sammen spekulationer. Fundet af Ishango-knoglen støtter teorien om, at den senere matematik i det gamle Egypten i relation til pyramiderne og til landmåling har afrikanske rødder.



Den 20.000 år gamle Ishango-knogle blev fundet på bredden af Edwardsøen på grænsen mellem Uganda og Congo i Afrika.

Der er sat tre mærker øverst på knoglen. Disse mærker er efterfulgt af 6, 4 og 8 mærker. Det kunne tyde på, at personen, der har sat mærkerne, har kendt til multiplikation med 2. Hvis man lægger antallet af mærker sammen i hver 'kolonne', får man følgende: 60, 48 og 60. Alle tal kan deles med 12. Mærkerne i knoglen anses for at være et af de første konkrete beviser for menneskets behov for at bruge matematikken til at måle og tælle.



Sfinksen foran den enorme Kheopspyramide uden for Cairo. For næsten 4.000 år siden udviklede egyptiske matematikere imponerende praktiske færdigheder for at kunne opføre de storslåede pyramider. Den største af alle pyramider, Kheopspyramiden, har en kvadratisk grundflade med sidekanter af længde 230,3 meter med en fejlmargen på mindre end 0,01 %.

Egyptisk matematik

Udviklingen af en civilisation i det gamle Egypten var stærkt afhængig af tidevandet i floden Nilen og de årlige oversvømmelser, der var en afgørende forudsætning for både landbruget og livet i Egypten som helhed. Ved en oversvømmelse var det dog umiddelbart umuligt at se grænserne mellem de forskellige landbrug, og det var derfor vigtigt at holde styr på fordelingen af landstykker ved landmåling. Fra et matematisk synspunkt er det interessant, at navnet for det matematiske felt *geometri* er afledt af det græske ord *geometria*, som betyder måling af land, med andre ord landmåling. Den græske historiker Herodot brugte dette ord i det femte århundrede f.Kr. i sit store epos om Perserkrigene, hvori han skriver, at 'geometria' netop blev anvendt i det gamle Egypten til at finde den rette fordeling af landstykker efter Nilens oversvømmelser.

Hovedbedrifterne udført af de tidlige egyptiske matematikere involverer praktiske færdigheder i tilknytning til måling ikke mindst i forbindelse med bygningen af de storslåede pyramider, hvoraf den ældste dateres til omkring 2700 f.Kr. Specielt skal nævnes, at den største af alle pyramider, Kheopspyramiden, har en kvadratisk grundflade med sidekanter af længde 230,3 meter med en fejlmargen på mindre end 0,01 %.

Hovedkilden til oldtidens egyptiske matematik er en papyrus fra omkring 1650 f.Kr., som er kopieret af Ahmes fra en ældre tekst fra omkring 1850 f.Kr., der ikke længere eksisterer. Papyrussen er navngivet *Rhind papyrussen* efter den britiske opdagelsesrejsende Henry Rhind, som købte den i 1858. Papyrussen, der nu findes på British Museum, indeholder tabeller af tal og en samling på omkring 80 problemer, der er blevet brugt ved uddannelsen af skrivere. Nogle af problemerne er iklædt en praktisk formulering, såsom at bestemme, hvor meget brød eller hvor meget øl der kan fremstilles fra en

given mængde korn, at udregne arealet af en rektangulær mark eller volumenet af en cylindrisk silo, samt hvordan man bestemmer hældningen af en pyramide. Mange problemer er dog ikke forbundet med praktiske situationer. Løsningerne blev fundet ved brug af regler, som skrivers lærte; med mange af problemerne fulgte delvise eller endog fuldstændige løsninger. En af disse regler omhandler arealet af en cirkel og siger, at man finder arealet ved at tage diameteren i cirklen, subtrahere $1/9$ af den og så kvadrere den resterende del. Denne fremgangsmåde giver en ganske god tilnærmelse til det eksakte areal af en cirkel, og det svarer til en tilnærmet værdi af tallet π på omkring 3,16 i nutidig skrivemåde.

Det egyptiske talbegreb bestod af de positive hele tal, stambroker (reciprokke til hele tal) og brøken $2/3$. Egypterne havde symboler for tallene 1, 10, 100, osv., op til 1.000.000, og de konstruerede symboler for andre positive hele tal ved at gentage disse symboler. De havde detaljerede procedurer for multiplikation og division baseret på en simpel metode: Dublering og halvering.

Mesopotansk matematik

I oldtiden udvikledes en civilisation fra omkring 3500 f.Kr. af det sumeriske folk i landområdet mellem floderne Eufart og Tigris i det nuværende Irak. Landet blev kaldt Mesopotamien, som netop betyder 'mellem floderne'. Sumererne var det første folkeslag, som byggede større byer. Omkring 1700 f.Kr. erobrede herskeren i byen Babylon hele området omkring sin by, og byen udviklede sig til en imponerende metropol. I eftertiden er navnet Babylon lidt ukorrekt blevet knyttet til alle kulturelle og videnskabelige bedrifter opnået af folket i Mesopotamien.

Mesopotansk, eller Babylonsk, matematik er den mest indgående studerede matematiske tradition før grækerne, og det er formodentlig den tradition, som har haft størst betydning for senere udviklinger i matematikken. Dette skyldes i høj grad, at skrivning i Mesopotamien blev udført med en stylus (som regel en bambusgriffel) på en tavle af vådt ler, som blev tørret i solen, når teksten var færdig, og at disse lertavler bedre kunne overleve til eftertiden end den mere forgængelige papyrus. Begyndelsen til matematik i Mesopotamien kan spores tilbage til omkring 3300 f.Kr., hvor behovet for en mere systematisk tilgang til bogholderi og opmåling af landarealer kaldte på udvikling af hensigtsmæssige målesystemer.

Omkring 2500 f.Kr. blev det i Babylonien til en specialiseret beskæftigelse for nogle få udvalgte at skrive og regne. Kort før 2000 f.Kr. blev det første positionsbaserede tal-system udviklet til brug i den stærkt centraliserede og bureaukratiske administration. Systemet var baseret på tallet 60 (trestalssystemet), og elementer af systemet kan stadig genfindes i vore dages tidsinddeling og vinkelmåling. Som det nok vil være uundgåeligt med virkelige matematikere, udvidede skrivers imidlertid deres matematiske idéer langt ud over grænserne for den praktiske nødvendighed. Til øvelsesformål skabte de i denne proces således de første rent matematiske opgaver, f.eks. division med store runde tal, inklusive tal, for hvilke det reciprokke tal giver en brøk, der ikke slutter i positionssystemet baseret på 60.

Babylonsk matematik nåede sit højdepunkt omkring 1800 f.Kr., hvor metoderne til at løse ligninger af første og anden grad blev udviklet baseret på algebraiske teknikker som kvadratets fuldstændiggørelse – i brug også i vore dage. Til oplæring af studenter brugte man kun løsningsmetoden til lineære ligninger, hvorimod de mere raffinerede opgaver på det udgravede kildemateriale i form af lertavler tjente til at træne lærernes regnefærdigheder og til at vise deres tekniske beherskelse af metoderne.

Efter 1600 f.Kr. opløstes skolerne for professionelle skrivere, og arbejdet med mere avanceret matematik ophørte. I anden halvdel af det første årtusinde f.Kr. indtraf en ny opblomstring i babylonsk matematik i tilknytning til udvikling af forbedrede metoder til astronomiske beregninger.

Mesopotansk matematik

Kvadratets fuldstændiggørelse

Udtrykket $x^2 + kx$ kan for en vilkårlig konstant k omskrives til

$$x^2 + kx = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4}.$$

Denne omskrivning kaldes *kvadratets fuldstændiggørelse*.

Hvis man skal løse den generelle ligning af anden grad

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

omskrives ligningen først til

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

og dernæst ved kvadratets fuldstændiggørelse til ligningen

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0.$$

Heraf følger

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

Såfremt $b^2 - 4ac \geq 0$, kan ligningen nu løses ved uddragning af en kvadratrod. Find formelen.

OPGAVE

Opgave: Løs ligningerne $2x^2 + 4x + 1 = 0$ og $2x^2 + 4x + 2 = 0$ ved at benytte metoden om kvadratets fuldstændiggørelse.



Mayaruinerne ved Palenque i Mexico. Her beregnede mayafolket for 1.000 år siden varigheden af en månemåned til 29,5308 dage. Nutidens værdi er 29,53059 dage.

Mayansk matematik

Mayaerne er skaberne af den mest avancerede civilisation i det gamle Amerika, som varede i over 3.000 år, fra omkring 2000 f.Kr. til 1521, da spanske erobrere invaderede Mexico. Spanierne opdagede, at mayaerne havde skabt et stort imperium kontrolleret ved et netværk af tæt befolkede bystater. De havde et skriftsprog i form af komplicerede hieroglyffer skrevet på både sten og papir lavet af bark. Mayaerne var ivrige astronomer, der iagttog stjernehimlen nøje, og de udviklede en meget nøjagtig kalender baseret på studier af bevægelserne af solen, månen og Venus. De havde højt udviklede kunstarter såsom billedhuggerskulptur, malerkunst og pottemageri samt egentlige videnskaber såsom lægevidenskab. Der var mange handelsfolk i mayaernes samfund, men hovedparten beskæftigede sig med landbrug og dyrkede korn og andre afgrøder i et avanceret landbrugssystem, som indbefattede overrisling.

Mayaerne havde udviklet et interessant talsystem med tyve symboler, som repræsenterede tallene et til tyve. De skrev tallene ud ved at bruge streger og prikker, hvor hver prik repræsenterede 1 og hver streg repræsenterede 5. Ved at placere prikker oven over streger kunne de herved konstruere symboler for tallene 1 til 20. Talsystemer med basis 20 bruges stadig i vore dage af hopiindianerne i det nordøstlige Arizona og det arktiske folk inuitterne (eskimoerne). Det er næsten sikkert, at baggrunden for talsystemer med tyve som basis skal findes hos oldtidsfolk, der talte på både fingre og tæer. Det fuldstændige talsystem, som mayaerne brugte, var baseret på 18 og 20, således at tallet 360 var inkluderet.

Mayaerne udførte astronomiske målinger med bemærkelsesværdig nøjagtighed ved at benytte to pinde anbragt i et kryds og betragte de astronomiske objekter under den rette vinkel dannet af pindene. På basis af målinger med sådanne primitive instrumenter var mayaerne i stand til at beregne årets længde til 365,242 dage (nutidens værdi er 365,242198 dage). To yderligere bemærkelsesværdige beregninger vedrører længden af månemåned. I Copán (nu på grænsen mellem Honduras og Guatemala) fandt mayaastronomerne, at 149 månemåneder varede 4.400 dage, hvilket giver 29,5302 dage som længden af månemåned. I Palenque i Mexico beregnede de, at 81 månemåneder varede i 2.392 dage, hvilket giver 29,5308 dage som længden af månemåned. Nutidens værdi er 29,53059 dage.

Matematikens græske arv

Omkring 600 f.Kr. begyndte grækerne for alvor at betragte matematik som en logisk struktur og som et redskab til at forstå kosmos, men det er vanskeligt at sige hvorfor. Alt hvad man med sikkerhed ved er, at fra omkring dette tidspunkt var grækerne overbevist om, at universet i alt væsentligt er rationelt organiseret, og at alle naturfænomener følger en præcis og stabil plan; rent faktisk en matematisk plan. Grækerne blev derved det første folk, der forsøgte at ræsonnere sig til forklaringer på fænomener i omverdenen.



Sten fra græsk tempelruin på Sicilien. De gamle græske matematikeres mange banebrydende bidrag til matematikken udtømte mulighederne for elementær matematik til en sådan grad, at der helt frem til det sekstende århundrede kun blev gjort få matematiske fremskridt af betydning, ud over det der kaldes græsk matematik.

Geometri

De matematiske argumenter hos grækerne var stort set geometriske argumenter, og mens grækerne undersøgte tingene, udviklede de samtidigt hjælpemidler fra geometrien. Derved kunne andre nemt eftergøre teknikken, og nye matematikere kunne hurtigere nå frem til fronten af udviklingen og gøre nye fremskridt i forståelsen af universet. På denne måde bidrog grækerne til at grundlægge den metodologi, vi genfinder i moderne videnskab.

Geometri som ren matematik omfatter en samling af abstrakte udsagn om ideelle former og beviser for disse udsagn. Thales (omkring 600 f.Kr.) er den første græker i processen hen imod opbygning af et hierarkisk system for geometri baseret på nogle indledende aksiomer og på deduktion og argumentation. Ifølge legenden beviste Thales adskillige sætninger i geometri, deriblandt sætninger om cirkler og kongruens af trekantede, der blev anvendt til navigation ved sejlads. Medlemmerne af en berømt skole grundlagt af Pythagoras omkring 500 f.Kr. mente, at 'alt er tal'. Medlemmerne af skolen prøvede at kvantificere alting, idet de specielt var opmærksomme på figuralt (f.eks. trekantstal) og hele tal (f.eks. primtal). I geometri er pythagoræerne kendt for deres opdagelse af den såkaldte *Pythagoras' sætning*, der siger, at kvadratet på hypotenusen i en retvinklet trekant er summen af kateternes kvadrater. De lærde diskuterede dog fortsat, om ikke allerede babylonierne kendte sætningen. Fra den tidlige periode bør man dog i særlig grad fremhæve Eudoxus (ca. 391-338 f.Kr.), som er kendt for en *teori om proportioner* og for den såkaldte *exhaustionsmetode*, der gjorde det muligt på stringent måde at bestemme arealer og volumener.

Fra omkring 500 til 300 f.Kr. var Athen det vigtigste intellektuelle centrum i Grækenland, og byen fostrede store tænkere som Platon (ca. 427-347 f.Kr.) og Aristoteles (384-322 f.Kr.). Hverken Platon eller Aristoteles huskes primært som matematikere, men de beredte i høj grad vejen for grækernes senere banebrydende matematiske bidrag. Omkring 387 f.Kr. grundlagde Platon således en skole i et område af Athen kaldet Akademi, og hans skole (akademi) blev hurtigt centrum for grundlæggende matematiske studier og filosofisk forskning. Over indgangen til Platons akademi stod indskriften: "Lad ingen uden kendskab til geometri få adgang her".

Platon mente, at studiet af matematik og filosofi gav den bedste uddannelse for dem, der skulle beklæde ansvarsfulde stillinger i staten. I dialogen *Staten* diskuterede Platon, hvad pythagoræerne omtalte som de matematiske kunstarter, nemlig fagene aritmetik, geometri i planen og rummet, astronomi og musik. Platon forklarede disse fags natur og retfærdiggjorde deres betydning for uddannelsen af statsmænd. I dialogen *Timæus* inkluderer Platon en diskussion af de fem regulære polyedre i rummet: Tetraederet, heksaederet, oktaederet, dodekaederet og ikosaederet. Aristoteles var fascineret af spørgsmål om logiske forhold og systematiserede studiet af logik og deduktiv argumentation. Specielt diskuterede han syllogismer i logikken, og han omtalte et bevis for, at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives på rationel form som en kvotient mellem hele tal.

Omkring 300 f.Kr., da Ptolemaios I fik magten som konge af Egypten, flyttede den matematiske aktivitet til den egyptiske del af det græske imperium. I metropolen Alex-

andria grundlagde Ptolemaios et universitet, som blev det intellektuelle centrum for græsk videnskabeligt arbejde i mere end 800 år.

Den klassiske græske geometri er først og fremmest overleveret til eftertiden – dog ikke i primært kildemateriale – i de berømte 13 bøger skrevet af Euklid i Alexandria omkring 300 f.Kr. og kendt som *Euklids Elementer*. I disse bøger opsummeres og systematiseres den grundlæggende matematiske og især den geometriske viden, som grækerne besad på Euklids tid. Denne fremstilling har præget al senere fremstilling af matematik. Eudoxus bliver ofte krediteret for at have udviklet teorierne, der ligger bag Bog V (om proportioner) og Bog XII (exhaustionsmetoden). Det geometriske indhold i *Elementerne* kendes nu som *euklidisk geometri*.

Euklid baserede sine studier af geometri på fem indledende postulater (udsagn han umiddelbart antog for sande) og brugte regler for deduktion til at udlede ethvert nyt resultat på logisk og systematisk vis herfra. De første tre postulater fastlægger de tilladelige regler for konstruktion med passer og lineal. Sådanne konstruktioner var af stor betydning for grækerne, da det for dem gav beviser for, at de geometriske objekter eksisterede i den virkelige verden. Det fjerde postulat introducerer begrebet en ret vinkel og postulerer begrebets entydighed. Mens de første fire postulater umiddelbart blev accepteret, gav det femte postulat fra starten anledning til uro, og det blev hurtigt det mest berømte. Det er formuleret som et postulat om rette linjer, der skærer hinanden, idet det skal bemærkes, at en ret linje hos Euklid er et liniestykke af endelig længde – grækerne undgik begrebet 'det uendelige', som de ikke fattede. I de følgende århundreder frem til begyndelsen af det nittende århundrede blev mange forgæves forsøg gjort for at bevise, at Euklids femte postulat fulgte fra de fire andre postulater. Under dette arbejde blev Euklids femte postulat omformuleret på mange ækvivalente måder og fik i 1795 endelig den udformning, der kendes som *parallelpostulatet*, formuleret af Playfair.

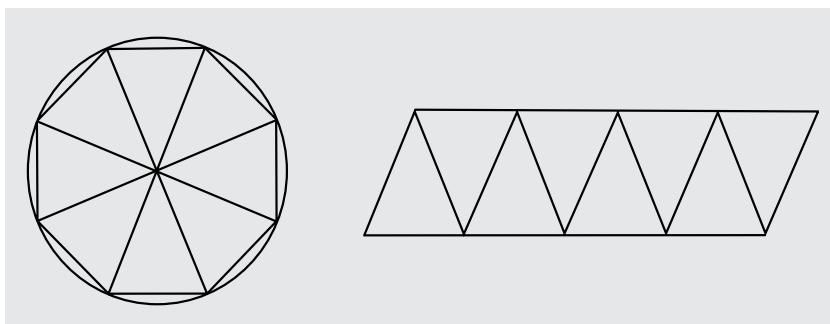
Exhaustionsmetoden, udviklet af Eudoxus, blev brugt til at tilnærme en geometrisk figur, for hvilken arealet (volumenet) skulle bestemmes med en geometrisk figur, for hvilken arealet (volumenet) allerede var kendt. Når tilnærmelsen bliver gjort bedre og bedre, fremkommer det søgte areal (volumen) som en grænseværdi. Det skal dog bemærkes, at grækerne ikke accepterede uendelige processer, og at de derfor havde vanskeligheder med at formalisere grænseværdibegrebet. Eudoxus' arbejde blev forfinet i skrifter af Archimedes (ca. 287-212 f.Kr.), der blev født i den græske koloni Syrakus på Sicilien og senere arbejdede her efter at have modtaget sin uddannelse i Alexandria. Archimedes er en af de største matematikere til alle tider. Han perfektionerede exhaustionsmetoden og opnåede eminente resultater såsom hans bestemmelse af overfladen på en kugle. Han opstillede også en liste over de tretten halvregulære polyedre i rummet; polyedre, hvor sidefladerne er regulære polygoner, men ikke alle er af den samme form. Ved at tilnærme en cirkel med regulære polygoner med 96 kanter beviste Archimedes, at tallet π ligger mellem $3 \frac{10}{71}$ og $3 \frac{10}{70}$ (som er den velkendte tilnærmelse $\frac{22}{7}$).

Apollonius (ca. 262-190 f.Kr.) er en anden hovedfigur i græsk matematik. Han blev født i Perga i den nordvestlige del af Lilleasien, men kom til Alexandria i sin ungdom og lærte matematik hos Euklids efterfølgere. Apollonius er først og fremmest kendt for sin systematiske behandling af *keglesnittene*: ellipsen, parabelen og hyperblen.

Exhaustionsmetoden

Eudoxus regnes som ophavsmand til en metode til bestemmelse af arealer og volumener kendt som *exhaustionsmetoden*. Metoden blev perfektioneret af Archimedes, og den er en tidlig forløber for integralregningen.

Exhaustionsmetoden kan illustreres ved at se på, hvordan Archimedes bestemmer arealet af en cirkel med radius r . Archimedes tilnærmer først cirklen med en regulær $2n$ -kant med hjørnerne beliggende på cirkelns periferi. Den regulære $2n$ -kant deles dernæst i $2n$ ligebenede trekanter med et af hjørnerne i cirkelns centrum. Ved at vende hver anden af disse ligebenede trekanter med hjørnet svarende til centrum i cirklen udad kan de lægges op imod hinanden, så de tilsammen danner et parallelogram. Konstruktionen vises for $n = 8$ i nedenstående figur. For $2n$ stor er højden i parallelogrammet tæt på radius r i cirklen, og den tilsvarende side, som svarer til halvdelen af omkredsen af $2n$ -kanten, er tæt på halvdelen af omkredsen af cirklen, altså tæt på $\pi \cdot r$. Når vi lader $2n$ vokse ud over alle grænser (gå imod ∞), nærmer arealet af parallelogrammet sig $\pi \cdot r \cdot r$, og vi konkluderer derfor, at cirklen med radius r har arealet $\pi \cdot r^2$.



Talteori

Skønt de gamle grækere beundrede geometri og gjorde deres største opdagelser inden for dette felt, så bidrog de også til andre matematiske områder, i særdeleshed til talteori. Berømt er ikke mindst beviset i *Euklids Elementer* for, at der er uendeligt mange primtal, ført ved brug af *reductio ad absurdum* (bevis ved modstrid), som er en yndet type af bevisførelse hos Euklid. Et andet velkendt resultat i *Elementerne* er divisionsalgoritmen til at finde den største fælles divisor for to hele tal.

Diofant fra Alexandria opnåede andre bemærkelsesværdige resultater i talteorien. Årstallene for Diofant er usikre, men det er generelt accepteret, at han levede omkring 250 e.Kr. I hans hovedværk *Aritmetica* er Diofant først og fremmest optaget af at finde heltalsløsninger til algebraiske ligninger med heltallige koefficienter, såkaldte *diofantiske ligninger*.

De banebrydende bidrag til matematikken fra de græske matematikere udtømte mulighederne for elementær matematik til en sådan grad, at der helt frem til det sekstende århundrede kun blev gjort få fremskridt af betydning i matematikken, ud over det der kaldes græsk matematik. Det mest forbløffende er nok, at græske immigranter i Alexandria og på Sicilien lavede deres banebrydende arbejder i det forholdsvis korte tidsinterval fra omkring 350 f.Kr. til 200 e.Kr.



Talteori - Irrationale størrelser

For at tale om begrebet irrationale størrelser skal der være valgt en enhed for størrelsemåling. Denne måleenhed repræsenterer tallet 1. Et vilkårligt naturligt tal n repræsenteres så af enhver størrelse, der kan måles som et helt antal n af den valgte måleenhed.

En størrelse siges at være *rational*, hvis den kan deles i et helt antal lige store stykker, hvor stykkernes fælles størrelse samtidigt deler måleenheden i et helt antal lige store stykker. I modsat fald siges størrelsen at være *irrational*, altså hvis der ikke kan findes en fælles størrelse, som deler såvel den forelagte størrelse som måleenheden i et helt antal lige store stykker. Man siger også, at en irrational størrelse er *inkommensurabel* (usammenlignelig) med måleenheden.

En størrelse er dermed netop irrational, hvis den ikke kan repræsenteres som forholdet mellem to hele tal, altså den kan ikke repræsenteres ved en brøk. De irrationale størrelser repræsenterer de *irrational tal* i forhold til den valgte enhed for størrelsemåling, som repræsenterer tallet 1.

Pythagoræerne opdagede, at diagonalen i enhedskvadratet repræsenterer et irrationalt tal. Dette tal kaldes *kvadratroden af 2* og betegnes med $\sqrt{2}$.

Et bevis for, at $\sqrt{2}$ er irrational, kan føres ved brug af *reductio ad absurdum* (bevis ved modstrid).

Antag med henblik på at opnå en modstrid, at $\sqrt{2}$ kan skrives som en brøk $\frac{p}{q}$, altså

$$\text{at } \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Vi kan uden indskrænkning af bevisførelsen antage, at brøken er uforkortelig, altså at p og q ikke har en fælles divisor. Vi får straks $q\sqrt{2} = p$, som ved kvadrering giver $2q^2 = p^2$. Da 2 er et primtal, altså ikke har andre divisorer end 1 og sig selv, følger heraf, at 2 er en divisor i p og dermed, at p kan skrives på formen $p = 2p_1$. Så fås $2q^2 = 4p_1^2$, som reduceres til $q^2 = 2p_1^2$. Heraf følger nu som før, at 2 er en divisor i q og dermed at q kan skrives på formen $q = 2q_1$. Dette er i modstrid med, at brøken $\frac{p}{q}$ er uforkortelig. Vores antagelse om, at $\sqrt{2}$ kan skrives som en brøk, førte altså til en modstrid. Derfor må størrelsen $\sqrt{2}$ være irrational, hvilket skulle bevises.

Ved samme bevismetode kan man bevise, at \sqrt{n} er et irrationalt tal for ethvert primtal n , dvs. et heltal uden andre divisorer end 1 og n . Mere generelt gælder der følgende:

Sætning: For ethvert positivt heltal n er \sqrt{n} et irrationalt tal, medmindre n er et kvadrattal, altså medmindre $n = k^2$ for et helt tal k .

OPGAVE



Sætning: For ethvert positivt heltal n er \sqrt{n} et irrationalt tal, medmindre n er et kvadrattal, altså medmindre $n = k^2$ for et helt tal k .

Opgave: Bevis denne sætning.

Artiklens forfatter



Professor Vagn Lundsgaard





Evolutionens matematik

*- om optimering, spilteori
og hvorfor der fødes lige mange
dreng og piger*

Hovedteorien bag evolution er, at alle arter undergår en løbende og gradvis udvikling (evolution), og at drivkraften bag denne udvikling er en proces kaldet "naturlig udvælgelse" (naturlig selektion). Den naturlige udvælgelse bestemmes af organismens evne til at tilpasse sig sine omgivelser, processen forudsiger altså at: "De bedst tilpassede overlever". Evolutionen er dermed en optimeringsproces, hvor det, der optimeres, er individets evne til at videreføre sine gener. I mange situationer kan evolutionen kun forstås ved at tage hensyn til, at mange individer hver for sig og samtidig plejer deres egne interesser. Matematisk spilteori er velegnet til at beskrive netop disse situationer, og i dette kapitel diskuterer vi, hvordan optimering og evolution kan forstås ved hjælp af matematik.

Darwin, Galapagos-øerne og den naturlige udvælgelse

Den engelske naturhistoriker Charles Darwin besøgte i 1835 Galapagos-øerne om bord på ekspeditionsskibet H.M.S. Beagle. Galapagos-øerne ligger isoleret 1.000 kilometer fra det sydamerikanske kontinent, og her lever en række helt specielle dyr som skarver, der ikke kan flyve, leguaner, der svømmer i havet, og ikke mindst de berømte kæmpeskildpadder. Under sit besøg observerede Darwin, at kæmpeskildpadderne på øen Hood har et karakteristisk hvælvet, saddelformet skjold, som gør dyrene i stand til at strække halsen op og nå plantedele, der sidder højt oppe. Skildpadderne på nabøerne mangler denne hvælving, og de græsser da også langt nærmere ved jorden. Planterne på øen Hood er i gennemsnit højere end planter på nabøerne, og på Hood har kaktusplanterne desuden veludviklede torne på stænglens nederste dele, så kun dyr med lang hals kan nå op over tornene til de saftige kaktusfrugter. Kaktus på andre øer mangler sådanne torne. Charles Darwin konkluderede derfor senere, at det var en tilpasningsmæssig fordel for skildpadderne på Hood, at de havde udviklet et hvælvet skjold, så de kunne strække halsen og få fat i plantedele højere oppe.

Darwin indsamlede også et stort antal fugle på Galapagos, som viste sig at være forskellige arter finker. Darwin blev senere klar over, at disse fugle måtte have haft en fælles stamfader, der oprindeligt var kommet fra Sydamerika. Efterhånden bredte fuglene sig fra den ene ø til den anden. Hver gang de ankom til en ny ø, måtte fuglene tilpasse sig den mest almindelige føde. Planterne er forskellige på de forskellige øer, og derfor udviklede nogle fugle store næb, så de kan knække frøkernel, mens andre fik små næb, de kan bruge til at fange insekter med. Til sidst har de forskellige fugle udviklet sig så langt i forskellige retninger, at de blev til helt forskellige arter.



Galapagos-skildpaddernes skjold og faconen på næbbet hos finker gav Charles Darwin inspiration til sin lov om naturlig udvælgelse, bedre kendt som evolutionsteorien.

Darwins registreringer af de bemærkelsesværdige forskelle i næbbenes facon og funktion hos øernes små finker gav sammen med observationerne af kæmpeskildpaddernes skjold Charles Darwin en del af inspirationen til sit senere hovedværk fra 1859, "On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life", på dansk bedre kendt under sin korte titel "Om Arternes Oprindelse". Denne bog blev et afgørende bidrag til den moderne naturvidenskab.

Finkernes næb illustrerer Darwins lov om naturlig udvælgelse, en lov, der for første gang blev offentliggjort i bogen. Næbbets størrelse og form er et træk, der er kodet i fuglenes gener¹, og som forældrefuglene derfor giver videre til deres unger. Ikke alle ungerne får præcis samme næb, der vil være lidt variation. På nogle øer er et stort, kraftigt næb en fordel, så de unger, der har sådan et næb, vil klare sig bedst og vil selv få flest unger. I hver generation vil næbbene vokse en lille smule, indtil til sidst alle finkerne har store kraftige næb. På andre øer vil små, spidse næb være en fordel og vil derfor til sidst dominere.

¹ Darwin og datiden kendte ikke til gener og til eksistensen af dna, der indeholder de levende organismers genetiske kode. Siden Darwins tid har forskerne kunnet inddrage både biokemiske og genetiske data samt avancerede matematiske beregninger til at videreudvikle evolutionsteorien. Den moderne evolutionsteori er dog stadig i høj grad baseret på arven fra Darwins arbejde. Den vigtigste ændring fra Darwins tid er nok, at man i dag betragter evolution som en følge af molekylære og genetiske processer, og det antages nu, at det er tilfældige mutationer i generne, der skaber den variation, som evolutionsprocessen kan selektere fra.

Resistente bakterier og seksuel selektion

Et andet slående – og noget bekymrende – eksempel på naturlig udvælgelse er bakterier, der udvikler resistens over for antibiotika og altså ikke kan slås ihjel med f.eks. penicillin. For hundrede år siden fandtes antibiotika i moderne forstand ikke, så dengang var det ikke en evolutionær fordel for bakterier at være resistente. Efterhånden anvender vi mere og mere antibiotika til at behandle både syge dyr og mennesker, og i dag er resistens en stor fordel for en bakterie. Det er ganske vist sjældent, at tilfældige genetiske mutationer gør en bakterie mere resistent, men når det sker, vil denne bakterie få flere efterkommere end andre bakterier, og alle disse efterkommere vil også være resistente. Slutresultatet er, at resistente bakterier bliver mere og mere almindelige. Der eksisterer nu et intenst våbenkapløb mellem mennesker, der udvikler nye typer antibiotika, og bakterier, der udvikler resistens.

Det sidste eksempel, der skal nævnes i forbindelse med naturlig udvælgelse, er den ejendommelige kendsgerning, at hos mange dyrearter har hannerne udviklet særdeles iøjnefaldende, men tilsyneladende unyttige træk. Hanner hos f.eks. påfugle og paradisfugle er berømte for deres enorme haler i klare farver og med iøjnefaldende mønstre, mens hunnerne har langt mindre haler og mere afdæmpede og anonyme farver. Hannens prægtige hale hjælper den ikke med at finde føde eller at undgå rovdyr, snarere tværtimod. Hos andre dyr som løver og næseaber har hannerne udviklet henholdsvis enorme manker og kæmpestore næser. Selvom løven selvfølgelig ikke frygter rovdyr, gør hanløvens manke det væsentligt mere vanskeligt at skjule sig i græsset og snige sig ind på byttet. Næseabehannen anvender ikke næsen til noget praktisk, men dens næse gør det faktisk mere besværligt at indtage føde, og næsen kan desuden hænge fast i grene og torne, når aben springer fra træ til træ. Alligevel giver næseabehannens næse samt fuglens haler og hanløvens manke en evolutionær mening, fordi hunner foretrækker hanner med imponerende udseende. Men hvorfor gør hunner så det?

Dyrehannerne illustrerer et nyt aspekt af den naturlige udvælgelse, nemlig den seksuelle selektion. Finkens næb hjælper den med at samle føde, og resistens øger en bakteries chance for overlevelse. Manker, gevir, stødtænder, store næser og farvestrålende haler er derimod en påmindelse om, at for at føre sine gener videre til fremtidige generationer må man have en mage. Formålet med hannernes iøjnefaldende træk er at overbevise hunnen om, at netop denne han er en god mage og et godt parti.

Optimering og spil

Det er let at forstå Darwins finker som resultatet af en optimeringsproces. Næbbet udvikler sig til den form, der nu er bedst egnet til føden. Men eksemplet med resistens blandt bakterier minder os om, at evolutionen ikke er en ensidig optimering. Resistens er en fordel for bakterien, fordi mennesket bruger antibiotika, men mennesket bruger antibiotika, fordi de fleste bakterier netop ikke er resistente. De to optimeringsprocesser foregår samtidigt og afhænger af hinanden. Dette er netop, hvad der karakteriserer et spil i matematisk forstand. Vi kan altså sige, at mennesker og bakterier spiller et evolutionært spil mod hinanden.



Hanløvens store manke og den overdrevne næse hos næseabehannen er eksempler på, at evolutionen kan fremme udviklingen af tilsyneladende unyttige træk. Men store næser og store manker viser sig at give adgang til parring med flere hunner end de mindre iøjnefaldende konkurrenter.

Spilteorien blev især udviklet af John von Neumann mellem 1928 og 1944. Et klassisk eksempel på et spil er arrestanternes dilemma (engelsk: Prisoners' dilemma). To mænd, A og B, bliver arresteret, varetægtsfængslet i isolation hver for sig og tiltalt for en forbrydelse, de skulle have begået i fællesskab. Arrestanterne bliver nu spurgt hver for sig, om de vil tilstå forbrydelsen eller benægte den.

Hvis de begge tilstår, vil de blive straffet for forbrydelsen med 5 års fængsel. Hvis de begge benægter, vil de begge blive dømt til et års fængsel for en anden mindre forbrydelse. Det interessante er, hvad der sker, hvis den ene tilstår og den anden benægter: Han, der samarbejder med anklagemyndigheden vil blive sat fri med det samme. Han, der benægter, vil blive straffet ekstra hårdt med 8 års fængsel. Vi kan opsummere det i følgende tabel:

	B tilstår	B benægter
A tilstår	A: 5 år, B: 5 år	A: 0 år, B: 8 år
A benægter	A: 8 år, B: 0 år	A: 1 år, B: 1 år

Tabel 1. Straffe for de to arrestanter, afhængig af om de tilstår eller benægter.

I spilteorien antager man, at hver af de to spillere kun har øjne for sin egen gevinst, ikke for et "fælles bedste", og at de to vælger uafhængigt mellem deres mulige handlinger, uden at vide hvad den anden spiller foretager sig. Det kan lyde kynisk, men betyder i virkeligheden bare, at tabellen virkeligt beskriver spillernes handlemuligheder og deres udbytte.

Nash-ligevægten

Lad os nu sætte os i A's sted. A ved ikke, hvad B har tænkt sig at gøre. Hvis B tilstår, skal A også tilstå for at opnå en straf på 5 år i stedet for 8 år. Hvis B benægter, kan A helt undgå straf ved at tilstå. Uanset hvad B gør, har A fordel af at tilstå! B tænker naturligvis på samme måde, og hvis begge spillere handler rationelt, ender de med begge at tilstå og dermed få 5 års fængsel. Ikke en lykkelig udgang, når de nu kunne have benægtet begge to og nøjedes med 1 års fængsel!

Denne løsning på spillet har en egenskab, der er værd at bemærke: Vi startede med at gå ud fra, at A og B ikke kender hinandens handlinger, men hvis A skulle få at vide, at B har tænkt sig at tilstå, så er det stadig optimalt for A at tilstå! Det tilsvarende gælder, hvis B får at vide, at A har tilstået. Information om den andens valg får ikke spilleren til selv at vælge om. Det var den amerikanske matematiker John Forbes Nash, der først formulerede den ligevægt, der opstår, når alle spillere maksimerer deres udbytte. Vi siger derfor, at løsningen "A tilstår og B tilstår" udgør en Nash-ligevægt.

Nash-ligevægte

Definition: Lad to spillere A og B spille et spil, sådan at hvis A vælger strategien a, og B vælger strategien b, så få A gevinsten $J_A(a,b)$ og B får gevinsten $J_B(a,b)$. Vi siger nu, at to strategier (α, β) udgør en Nash-ligevægt, hvis $J_A(x, \beta) \leq J_A(\alpha, \beta)$ og $J_B(\alpha, y) \leq J_B(\alpha, \beta)$ for alle x, y .

Nash-ligevægten er altså karakteriseret ved, at hvis den først er indtruffet, så har ingen fordel af at forlade den.

OPGAVE

Se på en lidt anden version af arrestanternes dilemma: Hvis A tilstår, men B benægter, får B stadig 8 års fængsel, men A får nu kun en strafnedsættelse til 2 års fængsel. Er det stadig en Nash-ligevægt, at begge tilstår? Findes der andre Nash-ligevægte?

OPGAVE

Se på to spillere, der spiller "sten, papir, saks". Den, der taber, giver en krone til den, der vinder. I tilfælde af lige bliver der ikke overført penge. Opstil tabellen for spillet. Findes der en Nash-ligevægt?

OPGAVE



Lad nu den ene ”sten, papir, saks”-spiller erklære, at han vælger tilfældigt mellem sten, papir og saks, så alle tre har samme sandsynlighed. Hvad er denne spillers forventede gevinst, uanset hvad den anden spiller gør? Man siger, at løsningen, hvor begge spillere bruger denne strategi, er en Nash-ligevægt i blandede strategier. Ordet ”blandet” hentyder til, at spilleren vælger sin handling tilfældigt.

Hyppigheden af unger af han- og hunkøn

Det er et bemærkelsesværdigt faktum, at de fleste dyrearter får nogenlunde lige mange unger af han- og hunkøn. For mennesker er det måske ikke så mærkeligt ved første øjekast – når vi nu (hovedsageligt) lever i monogame parforhold, virker det måske ”naturligt”, at der bliver født en dreng for hver pige.

Men også hos f.eks. søløven fødes der omtrent lige mange hanner og hunner, på trods af at de voksne søløver lever i haremer med én han og op til 30 hunner. Det vil sige, at langt den største del af hannerne aldrig får fornøjelsen af at komme i nærheden af en hun. Er alle disse hansøløver så ikke overflødige? Ville det ikke være mere effektivt for søløverne kun at få én han for hver 20-30 hunner?

Selvom allerede Darwin var inde på dette tilsyneladende paradoks, var det den engelske biolog, genetiker og statistiker Ronald Fisher, der fandt løsningen. Herunder er en model, der beskriver problemet og dets løsning.



Hos søløver kan en stor han have et harem på helt op til 30 hunner, og kun samme han parrer sig med alle hunnerne. Hovedparten af hansøløverne kommer derimod aldrig i nærheden af en hun. Selvom de fleste hanner derfor er overflødige for at føre arten videre, fødes der alligevel lige mange søløveunger af han- og hunkøn.

Lad os se på en population med N individer. Arten er underordnet, bare den forplanter sig seksuelt. Populationsstørrelsen N er konstant i hver generation, f.eks. fordi populationen er begrænset af fødeudbuddet. Andelen af hunner blandt unger er p , og andelen af hanner er derfor $1-p$. Hanner og hunner har lige stor overlevelse, så andelen af hunner blandt de voksne er også p . Forplantningen foregår nu som følger:

Vælg én han og én hun tilfældigt; de danner et par og får et afkom, hvorefter parret går hver til sit.

Gentag dette, indtil vi har fået N nye individer, som så udgør næste generation.

Vi definerer nu et individs fitness (forplantningsegnet) som det forventede antal efterkommere, det vil have i næste generation. Lad os se på én hun, kaldet Eva, og beregne hendes fitness: Vi danner N par. Der er Np hunner, så hver gang vi danner et par, har Eva sandsynlighed $1/(Np)$ for at være med i parret. I alt kan Eva forvente at være med i et par $N/(Np)=1/p$ gange, og fordi hvert par får ét afkom, er Evas fitness altså $1/p$. Tilsvarende vil en han have fitness $1/(1-p)$.

Allerede nu kan vi øjne løsningen: Hvis $p > 1/2$, altså hvis der fødes flere unger af hunkøn end af hankøn, så vil hunnerne have en fitness, der er mindre end 2, mens hannerne vil have en fitness, der er større end 2. Hanner vil altså være en bedre investering end hunner! Der vil derfor blive født flere og flere hanner, indtil balancen er genoprettet, der er lige mange hanner og hunner, og de har alle samme fitness, nemlig 2.

Lad os gøre argumentet præcist og antage, at en anden hun, Alice, har en genetisk mutation, så hendes afkom bliver hunner med sandsynlighed q i stedet for med sandsynlighed p . Vi beregner nu den gennemsnitlige fitness af en af Alices unger: Med sandsynlighed q vil det være en hun og vil dermed have fitness $1/p$, og med sandsynlighed $1-q$ vil det være en han og dermed have fitness $1/(1-p)$. I alt bliver den forventede fitness af Alices unge:

$$q/p + (1-q)/(1-p)$$

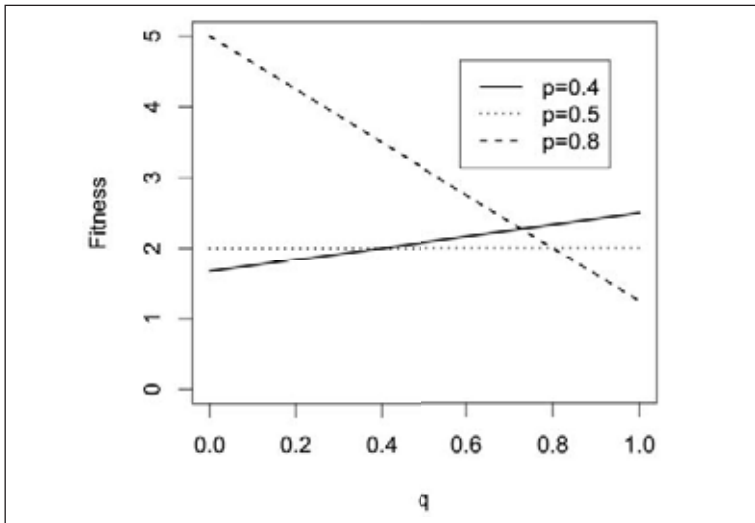
Denne fitness er tegnet i figur 1 som funktion af q for tre forskellige p , svarende til de tre situationer:

A) $p=1/2$. Fitness er uafhængig af q og lig 2.

B) $p > 1/2$. Fitness aftager med q , er større end 2 for $q < p$ og maksimal for $q=0$, hvor den er $1/(1-p)$.

C) $p < 1/2$. Fitness vokser med q , er større end 2 for $q > p$ og maksimal for $q=1$, hvor den er $1/p$.

Vi kan nu analysere den evolutionære dynamik: Hvis andelen p af hununger i populationen er større end $1/2$, og q er lidt mindre end p , så vil mutanten Alice have en større fitness end Eva. Alice giver sit muterede gen videre til halvdelen af sine unger; antallet af hendes efterkommere, der bærer genet, vil vokse i antal og til sidst helt fortrænge dem, der ikke bærer genet. Det samme vil ske, hvis p er mindre end $1/2$, og q er lidt større end p . Hvis p er forskellig fra $1/2$, vil der før eller senere komme en mutation (en Alice) med et q tættere på $1/2$, der vil invadere populationen og til sidst overtage. Evolutionen vil altså bevæge sig mod en tilstand, hvor $p=1/2$. I denne tilstand $p=1/2$ kan populationen ikke invaderes.



Figur 1. Fitness (1) som funktion af q for tre forskellige p .

Man siger, at $p=1/2$ er en evolutionært stabil strategi, et begreb, der blev indført af John Maynard Smith, og som ligger tæt op ad begrebet Nash-ligevægt.

OPGAVE

Betragt spillet, hvor Eva vælger et p og Alice vælger et q , hvorefter Eva får gevinsten $p/q + (1-p)/(1-q)$ og Alice får gevinsten $q/p + (1-q)/(1-p)$.

Vis, at løsningen $p=q=1/2$ er en Nash-ligevægt.

Findes der andre Nash-ligevægte med $0 < p, q < 1$?

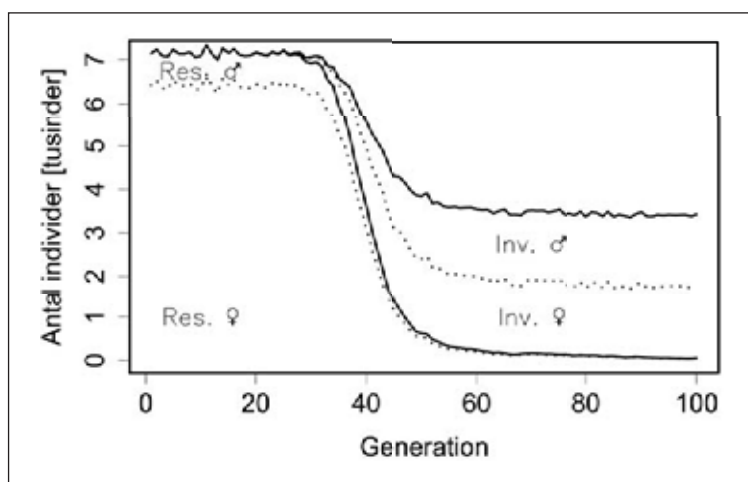
Den naturlige udvælgelse forudsiger altså, at der skal fødes en hanunge for hver hununge. Selvfølgelig kan denne konklusion ændres, hvis man laver om på modellen, og de færreste dyrearter får da også præcis lige mange unger af hvert køn. Alligevel er det en god første approksimation. Bemærk, at det ikke spiller nogen rolle for argumentet, om de voksne lever monogamt eller polygamt. Der fødes altså ikke lige mange drenge og piger, fordi voksne mennesker lever monogamt, men fordi det er en evolutionært stabil strategi, eller – lidt anderledes formuleret – fordi det er en Nash-ligevægt. Hvis der er en årsagssammenhæng mellem monogami og kønskvotienten blandt nyfødte, er det snarere monogamien, der følger af kønskvotienten!

"Intet godt sker for artens skyld"

I analysen i sidste afsnit tog vi udgangspunkt i fitness af et enkelt individ. Set fra søløvens synspunkt som art kunne man argumentere for, at de mange hanner var overflødige,

men den betragtning er irrelevant: Den naturlige selektion laver ikke optimale arter, men fremelsker individer, der er effektive til at videreføre deres egne gener. For at illustrere dette kan vi lave lidt om på modellen. Hansøløver er meget større end hunner, og de spiser mere. Hvis det er fødeudbuddet, der begrænser populationen, vil populationen altså være større, jo mindre en andel hannerne udgør. I stedet for at danne N par og lade hvert par få en unge, som vi gjorde i afsnit 3, starter vi nu med $N=1000$ fødeemner. Når der fødes en hununge, fjerner vi ét fødeemne, men når der fødes en hanunge, fjerner vi 5 fødeemner. Vi fortsætter, indtil der ikke er mere føde, og har nu dannet den nye generation.

I figur 2 ses en simuleret invasion. Mutanten Alice er succesrig med hensyn til at invadere populationen, ganske som vi forudsagde i afsnit 3, men resultatet er næsten en 50% mindre bestand!



Figur 2. Til at starte med har vi en population med 90 % hunner. Til tidspunkt $t=20$ introducerer vi en mutant Alice med $q=1/2$. I takt med at Alices efterkommere invaderer populationen, udgør hanner en større og større del af populationen. Fordi hanner spiser mere end hunner, og fordi der er fødeknaphed, bliver populationen mindre og mindre.

Ligesom i arrestanternes dilemma kunne arten samarbejde om kun at føde de hanunger, der er brug for, og derved få et større fælles udbytte (en større population). Men selvom denne strategi er til det fælles bedste, er den ikke stabil: Det vil være en fordel for den enkelte at bryde samarbejdet.

Den naturlige udvælgelse fører altså ikke nødvendigvis til arter, der klarer sig bedre, selvom det ofte vil være tilfældet. Man kan endog konstruere eksempler på såkaldt evolutionært selvmord, hvor den naturlige udvælgelse til sidst fører til en art, der ikke kan reproducere sig selv og derfor uddør!

Tilbage til haler, næser og manker

Også påfuglens hale, løvens manke og næseabens næse kan bedst forstås som et spil. Set som et ensidigt optimeringsproblem kan man konstatere, at et imponerende udseende er en god investering for en han, men denne konstatering leder bare til flere spørgsmål: Hvorfor foretrækker hunner hanner med flotte haler eller store næser, og hvorfor er det kun hannen, der bruger kræfter på at se imponerende ud?

Også her må man huske på, at der er mange aktører, der hver for sig forsøger at mele deres egen kage. De to køn spiller et spil, hvor de ganske vist har som fælles mål at få mange unger, men hvor hunnens indsats i de nævnte tilfælde er væsentligt højere end hannens. Det er både målt i tidsforbrug og energimæssigt særdeles krævende for en hun at lægge æg eller være drægtig i flere måneder. Derfor bruger hunnen tid på at vælge den helt rigtige han, og derfor må hannerne konkurrere (spille) indbyrdes om hunnerne. En manke, en hale eller en næse, der er bare lidt flottere end de andre hanners, signalerer, at hannen er så stærk (genetisk), at han har haft overskud til at udvikle umiddelbart overflødigt pynt. For hannen kan dette betyde mange flere parringer, så indsatsen er umagen og risikoen værd. På den anden side, fordi hannen ikke har grund til at være kræsen med valg af partner, er der heller ingen grund for hunnen til at udvikle imponerende fjerdragter eller andre iøjnefaldende træk.

Den naturlige udvælgelse har skabt en imponerende rigdom af arter, der hver for sig er perfekt tilpasset til deres livsvilkår. Der er talrige elegante og sofistikerede løsninger på livets mange forskellige udfordringer, og det er en rig kilde for mennesker, ikke bare til forundring, men også til inspiration. Fra flyvinger til burretape, medicin og beklædning ser man mennesket gentage naturens opfindelser. Selve evolutionen har også inspireret de såkaldte genetiske algoritmer; en familie af beregningsmetoder, der bruges til at løse vanskelige optimeringsproblemer.

Opsummering

- Den naturlige udvælgelse er en optimeringsproces, der fremelsker de ”mest egnede” individer.
- Denne proces har frembragt imponerende løsninger på komplicerede problemer, som mennesket har ladet sig inspirere af.
- Det, der optimeres, er evnen til at videreføre sine gener – ikke evnen til at vokse.
- Optimering sker i samspil med miljø og artsfæller og skal forstås som et spil.
- Nash-ligevægten beskriver den tilstand, hvor ingen spiller har fordel af at skifte strategi.
- En strategi er evolutionært stabil, hvis en population, hvor alle spiller strategien, ikke kan invaderes af en mutant.
- Der fødes lige mange unger af han- og hunkøn, fordi det er en Nash-ligevægtstilstand, eller alternativt fordi det er en evolutionært stabil strategi.
- Også for søløven er det en Nash-ligevægt at få én hanunge for hver hununge, selvom de voksne lever i harem med én han og op til 30 hunner.

Den simple forståelse af evolution er, at den frembringer optimale arter. Det er ofte resultatet, men ikke altid – evolutionen fremelsker individer, der er gode til at videreføre deres gener. Det sker i med- og modspil med andre arter og i vekselvirkning med miljøet, og matematisk spilteori er særligt velegnet til at beskrive denne dynamik.

Artiklens forfattere



Seniorforsker Andy W. Visser (tv) og Seniorforsker Uffe Høgsbro Thygesen





MATEMATIK IGENNEM MILLENNIER

Matematik i støbeskeen 2



De intellektuelle efterfølgere til grækerne i matematikkens historie var hinduerne i Indien. Skønt hinduerne allerede havde leveret geniale elementer til matematikkens udvikling meget tidligere, så fik bidragene fra Indien først virkelig betydning, da de blev sammenfattet med de græske bidrag til matematikken af islamiske lærde. Dette blev til 'Den gyldne tidsalder for hinduerne og araberne i matematik'.

Hindumatematik

Hinducivilisationen i Indien daterer sig tilbage til mindst 2000 f.Kr., og dens matematiske traditioner kan følges tilbage til omkring 600 f.Kr. Blandt de religiøse skrifter fra denne tidlige periode var der en klasse af skrifter kaldet Śulvasūtras (regler for snoren), som indeholdt geometriske konstruktioner – baseret på strækning og bøjning af snore – for konstruktion af hellige altre. Ved deres arbejde med design af hellige altre udviklede hinduerne gode tilnærmelser til $\sqrt{2}$, og de fandt løsninger, til problemer svarende til kvadratiske ligninger – rent faktisk de samme løsninger, som meget tidligere var blevet fundet af babylonske matematikere. I geometri kendte de sandsynligvis regler, der svarer til Pythagoras' sætning. De matematiske regler blev opstillet på helt empirisk basis, og de blev ikke eftervist ved nogen form for bevisførelse.

Fra omkring 300 f.Kr. var matematik vigtigt i Jain-religionen såvel til praktiske udregninger i astronomi som til overvejelser i forbindelse med meget store tal. I denne periode lånte hinduerne elementer af babylonsk, og senere også græsk, matematisk astronomi. Hinduerne havde et ganske særligt talent for aritmetik, hvor de nåede meget langt på egen hånd. Hvad angår algebra, kan de have lånt fra Alexandria og muligvis direkte fra Babylonien, og Indien stod også i nogen grad i gæld til Kina.

Den virkelige blomstring af matematikken i Indien fandt sted i perioden fra omkring 500 til 1200 med Aryabhata (476-550) og Brahmagupta (598-670) som de to mest fremragende indiske matematikere samt senere Bhaskara (1114-ca.1185), som publicerede vigtige arbejder om aritmetik. Det meste arbejde var motiveret af astronomi og astrologi. I begyndelsen af denne periode skabte hindumatematikere det positionssystem for tallene, som vi bruger i dag – dog ikke decimalbrøker. Senere indførte de negative tal til at repræsentere gæld, og de begyndte at bruge tallet 'nul' på den samme måde, vi nu anvender dette tal, dvs. som et tal til at gøre udregninger med – ikke bare en pladsholder. Aryabhata gav den første systematiske fremstilling af teorien for diofantiske ligninger. Han præsenterede også formler for summen af tallene og deres kvadrattal samt kubiktal, og han fandt tilnærmelsen $3,1416$ til π . Omkring 628 gjorde Brahmagupta rede for betydningen af tallet 'nul', og han blev den først kendte bruger af negative tal. Han løste også nogle kvadratiske diofantiske ligninger såsom ligningen $92x^2 + 1 = y^2$ (nu kendt som



Tidlig hindumatematik indeholdt geometri for konstruktion af hellige altre. Allerede omkring 600 f.Kr. udviklede hinduerne gode tilnærmelser til $\sqrt{2}$.

Pells ligning), hvortil han fandt den heltallige løsning $x = 120$, $y = 1151$. I denne periode udviklede hinduerne også grundlaget for den moderne trigonometri ved omstilling af græske idéer.

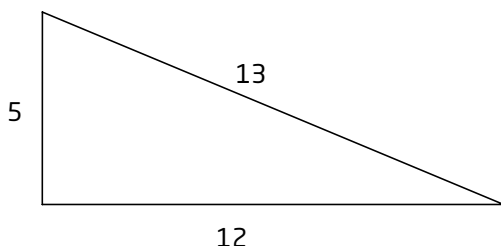
Efter 1350 blev trigonometrien yderligere udviklet – især i Sydindien – ved indførelsen af rækkeudviklinger, som man senere ser i Europa i forbindelse med metoderne fra differential- og integralregning (infinitesimalregning), med et hovedbidrag af Nilakantha i et arbejde fra 1501. Elementer af kombinatorik blev udviklet i forbindelse med studiet af metrum i poesi.

Hinduerne var interesserede i de aritmetiske og de beregningsmæssige aspekter af matematikken, som de bidrog stærkt til snarere end til de deduktive aspekter. Deres navn for matematik var *ganita*, som betyder ‘videnskaben om beregninger’.

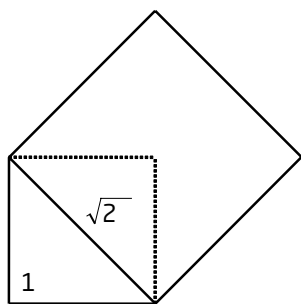
Śulvasūtras (regler for snoren)

Hovedskrifterne i Śulvasūtras (regler for snoren) blev frembragt i perioden 800-200 f.Kr.. Skrifterne havde først og fremmest religiøse formål, men de indeholder også mange geometriske konstruktioner, som hinduerne benyttede ved konstruktion af altre til ofringer. De mest hellige altre skulle være matematisk perfekte, og ved konstruktion af altrene havde man bl.a. brug for at kunne lave perfekte rette vinkler og for at kunne foretage perfekte fordoblinger af et areal.

Til konstruktion af en perfekt ret vinkel benyttede hinduerne sig af, at man ved bøjning af en snor får en ret vinkel frem som den største af vinklerne i en trekant med kantlængder a , b , c , hvor taltriplen (a, b, c) tilfredsstiller ligningen $a^2 + b^2 = c^2$; i vore dage kaldet en *pythagoræisk taltripel*. Dette princip blev også benyttet af de gamle egyptere, som benyttede taltriplen $(3, 4, 5)$ som kantlængder (i en given måleenhed). Hinduerne benyttede sjovt nok den større taltripel $(5, 12, 13)$ eller endog taltriplen $(15, 36, 39)$.



Ved fordobling af et areal benyttede hinduerne følgende regel: En snor, som strækkes langs diagonalen i et kvadrat, frembringer et kvadrat med dobbelt så stort et areal som det oprindelige kvadrat.



Islamisk matematik

I perioden 750-1500 var den islamiske verden den vigtigste region for matematisk forskning. Bemærkelsesværdige resultater blev opnået i aritmetik, i særdeleshed udviklingen af decimalsystemet. Islamiske videnskabsfolk ydede vigtige bidrag til algebra og trigonometri, og de studerede også geometri og talteori.

Arabiske matematikere videreudviklede matematikken af deres græske og indiske forgængere, hvis hovedværker blev oversat til arabisk – for størstedelens vedkommende i hovedcentret for visdom i akademiet bygget af kaliffen i Bagdad i begyndelsen af det niende århundrede. Ved sin beliggenhed på handelsruterne mellem Europa og Østen var Bagdad det ideelle sted for at sammensmelte bidragene fra grækerne og hinduerne. I dette center arbejdede astronomen Muhammad ibn Musa al-Khowârizmî, som skrev bogen *Al-jabr w'al muqâbala* i 830. Ordet *al-jabr* på arabisk betyder 'genoprette', hvilket i denne sammenhæng vil sige at genoprette balancen i en ligning ved på passende vis at overføre et led, som fjernes fra den ene side i ligningen til den anden side. Her finder vi oprindelsen til ordet *algebra*. Al-Khowârizmî skrev også en betydningsfuld bog om regning med de indiske cifre, hvorved han banede vejen for en aritmetik med decimaler, som førte til indførelsen af decimalbrøker i det tiende århundrede. I sin bog om algebra gav al-Khowârizmî først løsningen til lineære og kvadratiske ligninger ved en *algoritme* (et ord afledt af hans navn) svarende til den givet af babylonierne og dernæst et geometrisk bevis i den græske ånd. Disse traditioner i algebra blev fortsat af bl.a. Abu-Kamil og – med vægt på aritmetik – af al-Karaji i begyndelsen af det ellefte århundrede. I sin bog om algebra fra omkring 1079 demonstrerede Omar Khayyam, hvordan man kunne løse nogle typer af kubiske ligninger ved at skære keglesnit med hinanden.

Arabiske astronomer gjorde god brug af astronomiske hjælpemidler og instrumenter til navigation, såsom planisfæren og astrolabiet, som blev brugt til at observere himmellegemernes positioner og højder og til at bestemme tidspunktet på dagen. I den forbindelse blev trigonometri i planen og på kuglefladen videreudviklet fra de græske og indiske rødder af al-Battani (ca. 850-929), Abu'l-Wafa (940-98), al-Biruni (973-1048) og Nasir al-Din al-Tusi (1201-74). Nye trigonometriske formler, såsom sinusreglen, blev fundet, og de trigonometriske tabeller blev gjort mere nøjagtige.



I en periode på næsten 800 år var den islamiske verden med Bagdad som centrum den vigtigste region for matematisk forskning. Her fandt den islamiske matematiker al-Khowârizmî løsningen til lineære og kvadratiske ligninger ved en algoritme.

I geometri leverede araberne betydningsfulde bidrag til konstruktion med passer og lineal (Abu'l-Wafa) og til studiet af parallelpostulatet. Ibn al-Haytham (ca. 965-1038) bestemte volumenet af en omdrejningsparaboloide i tilfælde, hvor omdrejningsaksen ikke er parallel med parablens akse – sådanne tilfælde blev ikke betragtet af Archimedes. Al-Haytham ydede også bemærkelsesværdige bidrag til optik – især til studiet af sfæriske og paraboliske spejle.

Matematik i Europa i middelalderen

Den tidlige middelalder i Europa strækker sig fra omkring 400 til omkring 1000. I denne periode blev den matematiske arv fra grækerne stort set negligeret, og kun få matematiske fremskridt synes at være gjort. Der var heller ingen alvorlige forsøg på at dyrke matematik som et studieområde uden for det islamiske imperium, der strakte sig tværs over det nordlige Afrika og op i Spanien og Italien i Europa.

Genopblomstringen af interessen for matematik begyndte med Gerbert af Aurillac (938-1003), som blev uddannet i Catalonien, men havde god kontakt til de muslimske matematikere i det sydlige Spanien. Han var sandsynligvis den første, der indførte det hindu-arabiske talsystem i det kristne Europa, og han demonstrerede det på en kugleramme konstrueret til formålet. Gerbert blev kronet til Pave Sylvester II i 999. De første oversættelser af de islamiske videnskabelige arbejder nåede til Europa omkring 1100, og de inkluderede også arabiske versioner af mange græske hovedværker. Nogle af de originale græske tekster fra de tidligere græske kolonier havde dog allerede været i Grækenland noget tidligere. Ejendommeligt nok medførte introduktionen af nogle af de græske arbejder, at Europas opvågning forsinkedes et par århundreder. Dette gælder især Aristoteles' omfattende filosofiske skrifter, som var rimeligt velkendte omkring 1200. De intellektuelle var så begejstrede og imponerede over Aristoteles' omfattende lager af kendsgerninger og for hans logiske organisering af viden, at nye idéer ikke blev taget alvorligt. For matematik var det måske også en hindring, at Aristoteles lagde mindre vægt på kvantitative matematiske forklaringer af naturfænomener end på kvalitative fysiske forklaringer. Ikke desto mindre fandt der dog nogen matematisk aktivitet sted i Europa i perioden fra 1100 til omkring 1450 med universiteterne i Oxford, Paris og Wien (grundlagt i 1365) og Erfurt (grundlagt i 1392) som hovedcentre.

Leonardo af Pisa (ca. 1170-1250), kendt som Fibonacci, brugte også de hindu-arabiske taltegn, som Gerbert tidligere havde introduceret i det kristne Europa. I 1202 skrev Leonardo det betydningsfulde leksikografiske arbejde *Liber Abaci*, en fri oversættelse til latin af islamisk og græsk materiale. Denne bog indeholder mange problemer i aritmetik og algebra, heriblandt det berømte problem om kaninerne, som fører til *Fibonacci talfølgen* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., hvori hvert led efter de to første er summen af det forudgående par af led. *Liber Abaci* var designet til at undervise mere bredt i de hindu-arabiske beregningsmetoder, som allerede var kendt i nogen udstrækning i Europa, men kun i klostrene. I almindelighed brugte folk romerske talord og undgik nul, fordi de ikke forstod dette begreb. Leonardos bog ændrede kun en smule i dette billede, for trods hans fremstilling af de hindu-arabiske metoder til regning med hele tal og brøker samt kvadratrødder og kubikrødder blev arabertallene ikke fuldt ud accepteret i endnu 400

år. I et senere arbejde *Liber Quadratorum* fra 1225 gav Leonardo en fremstilling af algebra. Han fulgte her vejen anvist af de islamiske lærde og beskrev tingene i ord snarere end ved at bruge symboler og baserede algebraen på aritmetiske metoder. På den geometriske side skrev Leonardo i 1220 værket *Practica Geometriae*, hvori han reproducerede en stor del af Euklids Elementer og af græsk trigonometri.



I den lange periode fra omkring år 400 til 1000 blev der i Europa kun gjort få matematiske fremskridt. En undtagelse er Leonardo af Pisa (ca. 1170-1250), som skrev det vigtige værk *Liber Abaci* designet til at undervise bredt i de hindu-arabiske beregningsmetoder.

Følgende stykke poesi er fra "Senturas Evighedskalender" udgivet af Foreningen Sentura: **Sentura # 19**, magasin for litteratur og levende billeder, 2005.

5

Fem
er et primtal.
Det går de mindre tal
ikke op i. Jo, måske et enkelt,
men ettallet tæller ikke her. Sammen
med tre udgør fem parret af primtalstvillinger
3, 5, og tager vi syv med har vi primtalstrillingerne 3, 5, 7.
Primtallene findes, så store man kan ønske sig. Mon der også
er sæt af primtalstvillinger, så store man ønsker sig? Det er der ingen,
der ved. Og det er ganske vist! Fem er et pragtfuldt tal. Der var 1 par
kaniner i buret, så var der 2 par, så 3, hov 5, hopla 8, hallo 13, hjælp!
skreg Fibonacci. Han så systemet: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, osv. Og så var
5 et Fibonacci tal. Vupti! I blomster er der ofte femfold rotati-
onssymmetri i kronbladene. Pentagon i Washington er fem-
kantet. Der er fem regulære polyedre i rummet. Det mest
fantastiske er dodekaederet, som har tolv femkantede
sideflader. For Platon repræsenterede dette polyeder
selve verdensaltet. Femdages ugen er god, men da
jeg gik i skole, havde vi også fem timer om
lørdagen. Så nu er der ikke tid til Platon!

Vagn Lundsgaard Hansen

Sentura # 19, magasin for litteratur og levende billeder, 2005

Sætning: Der findes uendeligt mange primtal.

Bevis: Antag, at der højst findes endeligt mange primtal, og lad p_1, p_2, \dots, p_n være samtlige primtal. Tag nu produktet af disse primtal og læg 1 til, hvorved vi får tallet $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Ingen af primtallene $p_i, i = 1, \dots, n$, er en divisor i N , for i modsat fald ville p_i være en divisor i 1. Tallet N er derfor enten selv et primtal, eller det må indeholde en primtalsfaktor, som er forskellig fra ethvert af primtallene $p_i, i = 1, \dots, n$. Da vi antog, at p_1, p_2, \dots, p_n var samtlige primtal, har vi opnået en modstrid. Primtalsrækken fortsætter derfor i det uendelige. [Ovenstående bevis er i al væsentligt Euklids bevis i *Elementerne*, og det er det klassiske eksempel på et indirekte bevis.]

OPGAVE

Vis, at 3, 5, 7 er det eneste sæt af primtalstrillinger.



I Kina skabtes talrige matematiske opdagelser. Kinesiske matematikere fandt tidligt gode tilnærmelser for tallet π , men det var det trettende århundrede, der for alvor blev gennembruddenes århundrede. Her løste kinesiske matematikere geometriske problemer ved brug af algebra, ligesom multiplikation, division, kvadratiske ligninger og arealberegninger blev beskrevet.

Matematik i Kina

På mange måder oplevede matematikken i Kina en uafhængig udvikling svarende til de fælles bestræbelser i andre civilisationer. Kinas naturlige geografiske grænser (bjerge og hav) isolerede på den ene side landet fra fremmed påvirkning og på den anden side, når landet endelig blev erobret af indtrængende fjender, så blev de assimileret i den kinesiske kultur snarere end at søge den forandret i retning af deres egen kultur. I konsekvens heraf gennemgik Kina en kontinuert kulturel udvikling fra omkring 1000 f.Kr. og fremefter.

Ligesom det kinesiske sprog var matematikken i det gamle Kina meget koncis. Som regel var den motiveret af praktiske problemer, såsom at lave kalendere, og påvirket af handel, landmåling, arkitektur, bogholderi og skatter. Fra det fjerde århundrede f.Kr. blev kuglerammer brugt ved udregninger, hvilket effektivt betød, at et decimalsystem var i spil: Kuglerammer er et særkende for Kina, og de synes ikke at have været brugt af nogen anden civilisation.

Viden om kinesisk matematik før 100 f.Kr. er mangelfuld, selvom en bog skrevet på bambusstrimler om aritmetik har overlevet fra omkring 180 f.Kr. Mange betydningsfulde registrerede tekster har ikke overlevet, og kun lidt er kendt om deres indhold, heriblandt bøger med regneforskrifter af Du Zhong og Xu Shang. Den ældste fuldstændige tekst, som har overlevet, er værket *Zhoubi suanjing* (Zhous gnom manual) udarbejdet mellem 100 f.Kr. og 100 e.Kr. Værket handler mest om astronomi og angiver, hvordan man kan bestemme himmellegemernes positioner ved at benytte instrumenter baseret på måling af skygger, såkaldte gnomer, men det indeholder også vigtige afsnit om matematik. Blandt andet indeholder værket en formulering af *Gougu reglen*, den kinesiske version af Pythagoras' sætning, som kineserne anvendte i forbindelse med landmåling, i astronomi og i andre emner. Meget af den kinesiske matematik fra denne periode blev udviklet på grund af behovet for at lave beregninger i forbindelse med konstruktion af kalendere og for at kunne forudsige himmellegemernes positioner.

De ni kapitler om den matematiske kunst

Den mest berømte kinesiske matematikbog til alle tider er *Jiuzhang suanshu* (*De ni kapitler om den matematiske kunst*), der sandsynligvis er fra omkring 200 f.Kr., og i hvert fald har kopier overlevet fra begyndelsen af vores tidsregning. Dette betydningsfulde arbejde kom til at dominere den matematiske udvikling og stil i Kina i de næste 1.500 år, og mange senere videreførelser fremkom i form af kommentarer til denne tekst. Den indeholder blandt meget andet en række algoritmer til at løse lineære ligninger og til at uddrage kvadratrødder og kubikrødder, alt sammen idéer, som kineserne ultimativt udviklede til en detaljeret procedure til at løse polynomiale ligninger af vilkårlig grad. Set med matematiske briller gav Liu Hui (ca. 220-280) omkring 263 betydningsfulde matematiske bidrag i sin kommentar til *Jiuzhang suanshu*, idet han i modsætning til det, man ser i tidligere kinesiske tekster, angav de principper, hvorpå hans beregninger er baseret. Liu Hui beregnede arealerne af regulære polygoner med op til 3072 kanter og udledte herfra, at π tilnærmelsesvist har værdien 3,14159. Liu gjorde også brug af *Gougu reglen* til at beregne højden af objekter og afstande til objekter i tilfælde, hvor disse størrelser ikke kan måles direkte. Omkring halvtreds år efter Lius bemærkelsesværdige bidrag til matematik blev der gjort et væsentligt fremskridt i astronomi, da Yu Xi opdagede præcessionen af jævndøgnene.

I skyggen af de store mestre

Det tog nogen tid, før der blev gjort fremskridt i matematikken, som i dybde nåede endnu længere end dem opnået af Liu Hui. Teksten *Sunzi suanjing* (Master Suns Matematiske Manual) af Sun Zi (ca. 400-460) indeholder en opgave, som bliver løst ved at bruge *den kinesiske restklassesætning*, og er den tidligst kendte forekomst af denne type opgave. En manual – formodentlig af Xiahou Yang (ca. 400-470) – indeholder fremstillinger af tal i decimalnotation ved brug af såvel positive som negative potenser af ti.

Zu Changzhi (ca. 429-501) og hans søn Zu Geng (ca. 450-520) gjorde et af de vigtigste fremskridt. Zu Changzhi var en astronom, der udførte præcise observationer, som han

brugte til konstruktion af en ny kalender baseret på en cyklus på 391 år. I værket *Metode til Interpolation* udregnede han arealet af en regulær polygon med 24576 kanter og udledte heraf, at tallet π ligger mellem 3,1415926 og 3,1415927. Han anbefalede brugen af $\frac{355}{113}$ som en god tilnærmelse til π (denne tilnærmelse blev ikke genopdaget i Europa før 1.000 år senere) og $\frac{22}{7}$ i arbejde, som krævede mindre præcision. Sammen med sin søn Zu Geng fandt han formlen for volumenet af en kugle ved brug af et sektionsprincip, hvor kuglen skæres op i tynde skiver. Dette princip blev genopdaget af den italienske matematiker Bonaventura Cavalieri i 1635 og kendes nu i den vestlige verden som *Cavalieris princip*.

Begyndelsen til kinesisk algebra ses i et arbejde af Wang Xiaotong (ca. 580-640), hvori han løser nogle kubiske ligninger ved at udbygge en algoritme til at finde kubikrødder.

Interpolation var et vigtigt redskab i astronomi, og astronomen Liu Zhuo (ca. 544-610) udførte i den forbindelse kvadratisk interpolation ved at bruge en anden ordens differensmetode. Astronomien i Kina var ikke helt uafhængig af den udvikling, der fandt sted i Indien og i de indiske videnskabelige arbejder, hvoraf nogle blev oversat til kinesisk, og dette havde også indflydelse på matematikken.

Fra det sjette århundrede blev der undervist i matematik som en del af uddannelsesplanen for kommende embedsmænd, og Li Chunfeng (ca. 602-670) blev udnævnt som hovedredaktør af en samling matematiske afhandlinger til brug i denne sammenhæng. Samlingen blev i 1084 givet navnet *De Ti Klassikere*.

Perioden fra det tiende til det tolvte århundrede udviste kun få matematiske fremskridt. Nævnes bør dog bidrag af Jia Xian (ca. 1010-1070), hvori han forbedrede metoderne til at udregne kvadratrødder og kubikrødder og udvidede metoden til numerisk løsning af polynomiale ligninger ved at udregne potenser af summer med brug af binomialkoefficienter.

Et gyldent århundrede for matematik i Kina

Det trettende århundrede var en gylden periode for matematikken i Kina. Det første store fremskridt blev gjort af Oin Jiushao (1202-1261) i afhandlingen *Shushu Jiuzhang* (*Matematisk Afhandling i Ni Afsnit*), der fremkom i 1247. Oins værk indeholder blandt meget andet bemærkelsesværdigt arbejde om den kinesiske restklassesætning samt en formel for arealet af en trekant svarende til den formel, der blev fundet af den græske matematiker og ingeniør Heron omkring 60 e.Kr.

Li Zhi (også kaldet Li Yeh) (1192-1279) er den næste af de store kinesiske matematikere i det trettende århundrede. Hans mest berømte arbejde er *Ce yuan hai jing* (*Hav spejlbillede af cirkelmålinger*) skrevet i 1248. Værket indeholder bl.a. en metode til at konstruere og arbejde med polynomiale ligninger. Han skrev også i 1259 et mere elementært arbejde *Yi gu yan duan* (*Nye skridt i beregning*), hvor geometriske problemer bliver løst ved algebra.

Yang Hui (ca. 1238-98) er en anden hovedfigur fra denne gyldne periode i kinesisk matematik. I 1261 skrev han værket *Xiangjie jiuzhang suanfa* (*Detaljeret analyse af de matematiske regler i de Ni Kapitler og deres reklassifikationer*). Hans andre arbejder blev samlet i *Yang Hui suanfa* (*Yang Huis metoder til beregning*), der udkom i 1275. Yang beskrev multiplikation, division, roduddragning, kvadratiske ligninger og tilsvarende ligninger, rækker, udregninger af arealet af et rektangel, et trapez, en cirkel og andre figurer. Han gav også en beskrivelse af magiske kvadrater og magiske cirkler.

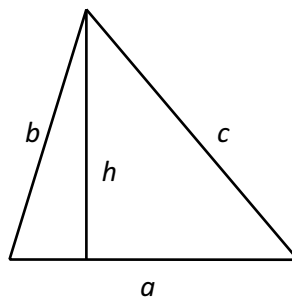
Den sidste af matematikerne fra den gyldne periode var Zhu Shijie (ca. 1260-1320), som skrev værkerne *Suanxue qimeng* (*Introduktion til matematiske studier*) publiceret i 1299, og *Siyuan yujian* (*Sande refleksioner over de fire ukendte*) publiceret i 1303. Det sidstnævnte arbejde indeholder den aritmetiske trekant af binomialkoefficienter. Den aritmetiske trekant var kendt allerede af islamiske matematikere, men den bliver nu sædvanligvis kaldt *Pascals trekant* efter den franske matematiker Blaise Pascal, som i et arbejde fra 1654 underkastede den en udtømmende matematisk analyse og forbandt den med alt tidligere arbejde om figurtal, permutationer og kombinationer samt binomialkoefficienter.

Et gyldent århundrede for matematik i Kina

Herons formel

Betragt en trekant med siderne a , b , c .
Lad $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ være den halve omkreds af trekanten.

Vi kan vælge siden a , så højden h på a falder inden i trekanten.



Lad A være trekantens areal.
Efter den sædvanlige formel for arealet af en trekant har vi $A = \frac{1}{2}ha$.

Herons formel:

$$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} .$$

Et algebraisk bevis for Herons formel

Ved brug af Pythagoras' sætning får man: $\sqrt{b^2 - h^2} + \sqrt{c^2 - h^2} = a$.

Ved kvadrering og efterfølgende overflytning af led fra venstre til højre side giver dette ligningen

$$2 \cdot \sqrt{b^2 - h^2} \cdot \sqrt{c^2 - h^2} = a^2 - (b^2 + c^2) + 2h^2.$$

Ved en yderligere kvadrering og en efterfølgende reduktion fås ligningen

$$4(b^2c^2 - (b^2 + c^2)h^2 + h^4) = (a^2 - (b^2 + c^2))^2 + 4(a^2 - (b^2 + c^2))h^2 + 4h^4,$$

som kan reduceres til

$$(2bc)^2 - (a^2 - (b^2 + c^2))^2 = 4a^2h^2.$$

Ved udnyttelse af reglerne for differencen mellem to tals kvadrater og for kvadrering af en toledet størrelse fås herefter i en række skridt

$$\begin{aligned} 4a^2h^2 &= (2bc + a^2 - (b^2 + c^2)) \cdot (2bc - a^2 + (b^2 + c^2)) \\ &= (a^2 - (b - c)^2) \cdot ((b + c)^2 - a^2) \\ &= (a + b - c) \cdot (a - b + c) \cdot (b + c + a) \cdot (b + c - a). \end{aligned}$$

Heraf følger $16A^2 = (2s - 2c) \cdot (2s - 2b) \cdot (2s) \cdot (2s - 2a)$, som umiddelbart kan reduceres til

Herons formel:

$$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}.$$

Artiklens forfatter



Professor Vagn Lundsgaard



A large, intense fire or explosion with bright yellow and orange flames against a dark blue background. The fire is the central focus, with a bright yellow core and a surrounding orange and red glow. The background is a dark, deep blue, suggesting a night sky or a dark environment. The overall image has a high-contrast, dramatic feel.

Brand!

Hver sommer indløber beretninger om voldsomme skovbrande især i det sydlige Europa, USA, Canada og Australien. De seneste år har navnlig Spanien, Grækenland, Californien og det sydlige Australien været særdeles hårdt ramt. De almindeligste årsager til de store brande er lynnedslag, menneskelig skødesløshed og pyromani, men faktisk er brand et naturligt og hyppigt fænomen i alle skovdækkede områder af jordkloden og til alle tider. Hovedkomponenten i det kul, der findes på den nordlige halvkugle, stammer således fra skovbrande, der kan dateres op til 365 millioner år tilbage i tiden. Imidlertid har der de sidste årtier været højere gennemsnitstemperaturer og usædvanligt mange og lange perioder med massiv tørke i både USA, Australien og Sydeuropa, hvilket naturligvis forstærker problemet. Alt tyder således på, at skovbrande i den nærmeste fremtid bliver både mere almindelige og muligvis alvorligere. Der er selvsagt god grund til at interessere sig for, hvordan skovbrande breder sig, og hvordan man mest effektivt kan bremse og bekæmpe disse brande, der mange gange koster menneskeliv, og som altid anretter store skader på natur, bebyggelser, afgrøder og husdyr. I dette kapitel får vi gennem en række øvelser indblik i, hvordan man finder eller vurderer tidsforløbet af skovbrande, dels med hensyn til hvor stort et skovområde der er blevet afbrændt til et givet tidspunkt, og dels med hensyn til udbredelsesformen, altså formen af brandfrontkurven til tiden t efter antænding.

Brand og brandbekæmpelse

Når der på en vindstille sommerdag pludselig går ild i en knastør skov, udbreder brandens frontkurve sig straks cirkulært ud fra antændingspunktet. Men hvis vinden blæser op og derved fører ekstra ilt til branden fra en given retning, bliver frontkurven langt fra cirkulær og branden dermed væsentligt vanskeligere at bekæmpe. Langt de fleste skovbrande i nyere tid har således været drevne af vinden som den mest afgørende faktor.

De eksisterende modeller for skovbrande forudsiger en elliptisk brandfrontkurve under generelle antagelser:

- Geografien på stedet er passende flad
- Vegetationen er passende ensartet
- Vinden blæser horisontalt i en konstant retning med en konstant fart.

Uanset om en brand er påvirket af vind eller ej, er det afgørende at få et klart og velinformeret overblik over situationen, terrænet, vejret og bebyggelser for at kunne planlægge den mest effektive bekæmpelse af branden:

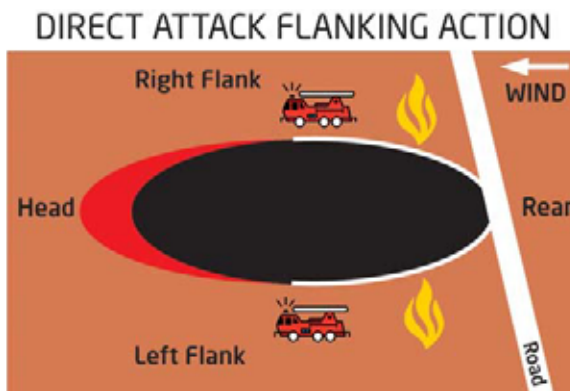
- Det nødvendige mandskab og det nødvendige materiel til sluknings- og redningsarbejdet skal estimeres



Brande har til alle tider været naturligt forekommende overalt i verdens skovdækkede områder. Selv i de fugtige tropiske regnskove opstår der jævnligt brande, typisk efter lynnedslag.

- Steder og tidspunkter, hvor branden i sin helhed kan svækkes mest muligt ved et passende strategisk angreb, skal identificeres
- Farlige situationer i sluknings- og redningsarbejdet skal undgås eller minimeres
- Befolkningen skal informeres om udviklingen og udbredelsen af branden samt om de nødvendige forholdsregler.

Modellering af skov, antændelse, vind og tab



Figur 1. Brandbekæmpelse via direkte angreb på brandens flanker.

Vi ser først på et rektangulært, vandret skovområde S . Det antages, at skovens bevoksning er fuldstændig ensartet med konstant tæthed: k træer pr. arealenhed. Træerne har alle samme højde og samme brandtekniske beskaffenhed. Vi vil groft antage, at man kan betragte brandens udbredelse som et plant problem – herunder at udbredelsen foregår langs en veldefineret brandfrontkurve.



OPGAVE 1 Hvorfor er det en grov antagelse?



Vi indfører et (x,y) -koordinatsystem i skovens plan, således at Origo ligger i midten af skoven, og således at skoven i øvrigt modelleres ved:

$$S: -L \leq x \leq L \text{ og } -M \leq y \leq M, \quad (1)$$

hvor L og M er givne værdier for skovens (halve) længde og (halve) bredde, henholdsvis.

Skovens areal er altså (hvis L og M begge er endelige):

$$A(S) = 4LM.$$

Antændelsesstedet betegnes med $p = (x_0, y_0) \in S$.

Vi lader $\Omega(t)$ betegne det delområde af S , der til tiden $t > 0$ er blevet afbrændt. Det tilsvarende udbrændte areal er så

$$A(t) = \text{Areal}(\Omega(t)) \quad (2)$$

En del af de følgende øvelser går ud på at finde dette areal i forskellige givne situationer.

Arealet svarer præcis til antallet af tabte træer ved branden: $\text{Tab}(t) = k \cdot A(t)$.

I starten vil branden typisk udbrede sig som en ellipse med voksende halvaksler og med en konstant translationshastighed (i vindretningen).

OPGAVE 2 Hvad er en ellipse?



Branden vil typisk danne en hovedfront, en halefront og to flanker. Fremdriften er størst ved hovedfronten, hvor der afbrændes flest træer pr. tidsenhed. Fremdriften er lille, men ikke nødvendigvis forsvindende i halen, hvor brandfronten bevæger sig baglæns i retning *op mod vinden*.

Hvis der ikke er nogen udefrakommende vind, vil udbredelsen være helt symmetrisk ud fra antændelsesstedet til ethvert tidspunkt $t > 0$ – såfremt skoven er tilstrækkelig stor.

Model uden vind

Den cirkulære udbredelse af brandkurven ud fra Origo kan modelleres på følgende måde, hvor ϕ betegner retnings-vinkel-parameteren. Tiden betegnes med t , og a er en konstant, der afhænger af skovens beskaffenhed, tæthed, træhøjde, tørhed osv., der også antages konstant i hele skoven:

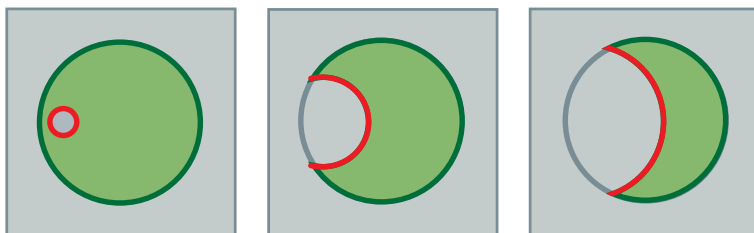
$$\begin{aligned}x(t, \phi) &= at \cos(\phi) \\y(t, \phi) &= at \sin(\phi),\end{aligned}\tag{3}$$

Ovenstående model medfører specielt, at radius af det cirkulære brændte område $\Omega(t)$ vokser proportionalt med tiden t .

OPGAVE 3



Hvorfor fremstiller (3) en cirkel til ethvert positivt tidspunkt t ? Hvad er ligningen for cirklen til tiden t ? Hvor stor er radius til tiden t ?



Figur 2. Cirkulær udbredelse uden vind og uden søer i en cirkulær skov.

OPGAVE 4



Antag ovenstående cirkulære udbredelsesmodel (3), og antag, at skoven er enormt stor, $L = M = \infty$. Hvad er arealet $A(t)$ af $\Omega(t)$ som funktion af t , når branden er antændt i et givet punkt $p = (x_0, y_0)$ til tiden $t = 0$?

OPGAVE 5



Antag igen (3), og antag nu mere realistisk, at skoven er rektangulær og har endelig udstrækning givet ved endelige værdier af L og M , men antag også (lidt urealistisk), at modellen (3) gælder, uanset hvor mange træer der er tilbage i skoven. Hvor lang tid går der fra antænding svarende til $t = 0$ på stedet $p = (x_0, y_0)$, indtil skoven er helt udbrændt?

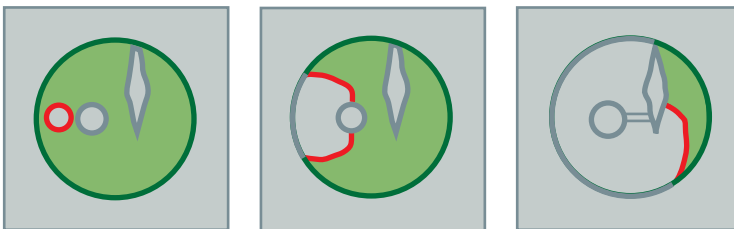
OPGAVE 6



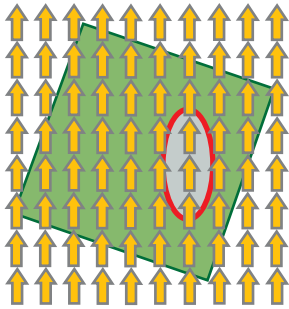
Hvis skoven er cirkulær som i figur 2 med radius R og antændes i en given afstand p fra centrum, hvor lang tid tager det så, inden skoven er helt udbrændt?

Model med konstant vind og konstant vindretning

Som allerede bemærket i indledningen spiller vinden en meget stor rolle for udbredelsen af skovbrande. En oplagt idé er at modificere den cirkulære model til en "elliptisk" model med hurtigst udbredelse i vindretningen, hvis vegetationen ellers er passende homogen, og hvis vinden virkelig har en konstant retning og størrelse.



Figur 3. Cirkulær udbredelse uden vind, men med to søer i en cirkulær skov.

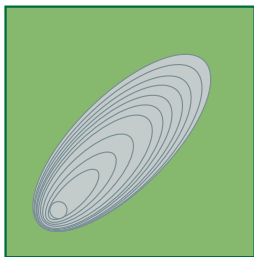


Figur 4. Øjebliksbillede af elliptisk udbredt brandzone.

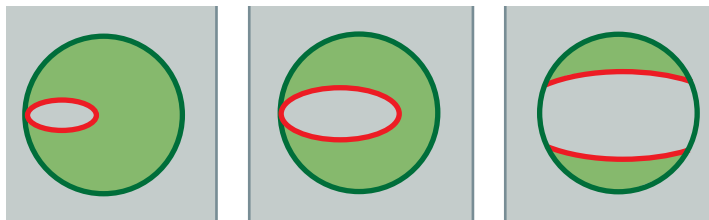
$$\begin{aligned} x(t, \phi) &= at \cos(\phi) \\ y(t, \phi) &= bt \sin(\phi) + ct, \end{aligned} \tag{4}$$

hvor t er tiden, antændingspunktet er Origo, og vinden blæser i y -aksens positive retning. Front-udbredelsesfarten v , flanke-udbredelsesfarten u og modvinds-udbredelsesfarten w af branden defineres ved:

$$\begin{aligned} v &= b+c \\ u &= a \\ w &= b-c, \end{aligned} \tag{5}$$



Figur 5. Ellipse-foliering af brandzonen.



Figur 6. Elliptisk udbredelse af brand med vind og uden søer i en cirkulær skov.

Det canadiske *Forest Fire Behaviour Prediction System* (CFFBPS) er baseret på en sådan elliptisk udbredelsesmodel og har dokumenterede værdier for u , v og w for et stort antal af de brandtekniske og geografiske parametre, der ellers har betydning for brandudbredelsen i forskellige scenarier. Det er ligeledes observeret, at inden for visse grænser afhænger forholdet a/b kun af vindens fart; dette er også en af de eksplicitte antagelser i CFFBPS.

Konstanterne a , b og c er altså udtryk for brandtekniske egenskaber ved skovmaterialet, nu med vinden (og den tilsvarende tilførsel af ilt) som en ny afgørende parameter indbygget i konstanterne. Desuden antages, at $b > c$, således at brandfront-ellipserne har en egentlig baglæns udbredelse, altså op imod vinden, jævnfør figurene 5, 6 og 8.

OPGAVE 7

Til ethvert tidspunkt $t_0 > 0$ er brandfrontkurven i denne model en ellipse med halvakslerne at_0 og bt_0 . Find ligningen for denne ellipse til ethvert tidspunkt t . Find arealet af ellipsen som funktion af t_0 .

OPGAVE 8

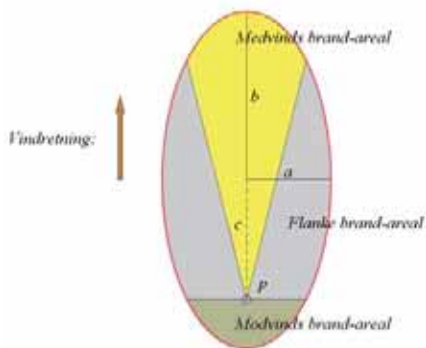
Lad E være en given brand-ellipse, der til et givet tidspunkt har halvakslerne $a \leq b$ – som i figur 7. Hvor stort er arealet af hvert enkelt af de der skitserede udbrændte områder, dvs. de områder, der er udbrændte ved henholdsvis 'medvinds-brand', 'flanke-brand' og 'modvinds-brand'? Angiv selv en rimelig definition af disse områder, som er i overensstemmelse med skitsen i figur 7. Hvordan kan man mange år efter branden afgøre, hvilken vej vinden blæste? Kan man også ved tilsvarende senere inspektion af området afgøre, hvor branden blev antændt?

OPGAVE 9

Find (for endelige værdier af L og M for en rektangulær skov og ved brug af den elliptiske model i (4)) et udtryk for, hvor lang tid der går fra antænding i punktet $(0,0)$, indtil skoven er helt udbrændt. Det antages også her, at den anvendte elliptiske model for udbredelse holder, uanset hvor mange træer der er tilbage i skoven.

OPGAVE 10

Samme spørgsmål for en cirkulær skov med radius R antændt i centrum, $(0,0)$.

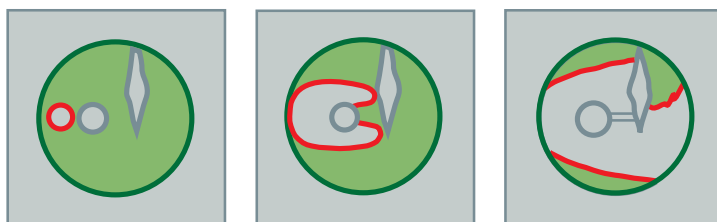


Figur 7. De arealer, der er udbrændt af hhv. 'medvinds-brand', 'flanke-brand' og 'modvinds-brand', definerer en inddeling af det elliptisk udbrændte område.

OPGAVE 11



Bestem værdierne a , b og c for Waipawa-branden, 31. januar 1991 ved Tikokino i New Zealand. Det oplyses, at den ellipseformede brandfront efter 30 minutter var 7,2 km lang og 1 km bred; efter 60 minutter var den 2 km bred og 14,5 km lang. Efter 60 minutter var brandhalen rykket 350 meter i modvindsretning af brandens antændelsespunkt. Vindhastigheden var i øvrigt "kun" 56 km/t i den angivne retning.



Figur 8. Elliptisk udbredelse med vind og med søer i en cirkulær skov.

En alternativ beskrivelse af den cirkulære udbredelsesmodel uden vind er følgende: Til ethvert tidspunkt har den øjeblikkelige brandfrontkurve konstant afstand til brandfrontkurven, som den så ud et minut tidligere – eller et vilkårligt andet tidspunkt efter antændelsen. Afstanden er imidlertid ikke nødvendigvis den retlinede afstand. Hvis der f.eks. findes en sø i skoven, så er afstanden mellem to punkter A og B bestemt som (længden af) den korteste sti (eller kurve) fra A til B – uden om søen. Det vil sige, at den korteste vej kan forløbe et stykke langs søbredden. Derved bliver brandfrontkurven (som jo består af de punkter, der har samme afstand til antændingspunktet) foldet rundt om søen som vist i figur 3.

De generelle undersøgelser af sådanne terræafhængige afstandsbegreber hører under faget *differentialgeometri*. Det er især Riemann'sk geometri og Finsler geometri, der beskæftiger sig med lokalt modificerede afstandsbegreber, der oven i købet (i Finsler geometrierne) inkluderer muligheden for asymmetrisk retningsafhængighed. Det er derfor en naturlig formodning, at brande i uensartede skove med variabel brandteknisk beskaffenhed og med variabel vind kan beskrives ved hjælp af Finsler-geometriske undersøgelser.

OPGAVE 12



Overvej ved hjælp af den ovenstående alternative beskrivelse, hvordan en skovbrand kan 'løbe om hjørner', altså f.eks. rundt om en sø, dels med og dels uden vind, og hvordan det kan give anledning til farlige situationer for mandskab og materiel, hvis man ikke er forberedt på fænomenet (se figur 8).



I dette kapitel har vi set på relativt simple modeller for brandudbredelse, som brandfolk og myndigheder faktisk anvender i planlægning af slukningsarbejdet. Vi har lavet beregninger ud fra en forudsætning om konstant vindstørrelse og -retning. Hvis vinden imidlertid *ikke* er konstant i hverken størrelse eller retning, kan det være helt umuligt for brandfolkene at bekæmpe branden. Den kraftige og tørre Santa Ana-vind var således hovedårsagen til, at de omfattende og katastrofale brande, som ramte Californien omkring den 21. oktober 2007, kunne udvikle sig så eksplosivt og ukontrolleret. Santa Ana-vinden kom netop i perioder stødende fra forskellige retninger, hvilket gjorde det næsten umuligt at dæmme op for ilden. Santa Ana-vind er et helt lokalt fænomen i Californien. Den optræder især om efteråret og består af relativt kold, og derfor tung, men tør luft, der fra Nevada og Utah med stor hastighed strømmer ned mod Californiens kyst. Den bliver presset igennem dalområderne og ankommer med kraftige vindstød til Los Angeles og San Diego samtidig med, at den undervejs er blevet opvarmet til ca. 20 grader, men stadig med en ekstrem lav fugtighed. Flere lufthavne ved Los Angeles målte den 22. oktober 2007 en luftfugtighed helt ned til 3 % og vindstød på 70 km/t. Den kraftige opdrift, som opstår ved store vild-brande, trækker ekstra luft, og dermed ekstra ilt, til brandens front fra de nærmeste omgivelser. Disse ekstra vinde kan give anledning til de mest alvorlige ukontrollerede brande, de såkaldte *brandstorme*.

Et andet eksempel er de katastrofale brande, der hærgede det sydøstlige Australien i februar 2009. De var især forårsaget af mange ugers forudgående tørke i kombination med ekstremt høje temperaturer og masser af letantændelig flora i skove, nationalparker og plantager. I Kyancutta måltet f.eks. 48,2 grader Celcius. Træfloraen i Australien er domineret af eukalyptus, og olien fra disse træer er direkte brandfarlig, selv på en almindelig varm dag. En skovbrand har derfor meget let ved ekstremt hurtigt at sprede sig igennem trækronerne, hvor luften er fuld af oliedampe, før den æder sig 'nedad' og ind i selve træmasserne.

Der er klart et stigende behov for at få udviklet dels gode og detaljerede forudsigelsesmodeller for skovbrande og dels effektive og hurtige metoder til at kortlægge og vurdere deres udbredelse i tid og sted, når katastrofen først er i gang.

Vi har i dette kapitel kun lige skimtet, hvilke metoder der allerede er i brug – og hvilke muligheder og enorme udfordringer der stadig findes – inden for denne anvendelse af geometrisk modellering.

Artiklens forfatter



Professor Steen Markvorsen

Coca-Cola

Enjoy

Coca-Cola

INFORMATION

17 03 08



EMERGENCY

HELP

CALL

NUMBER

112

OR

999

OR

111

OR

114

OR

113

Hvordan virker en colaautomat?

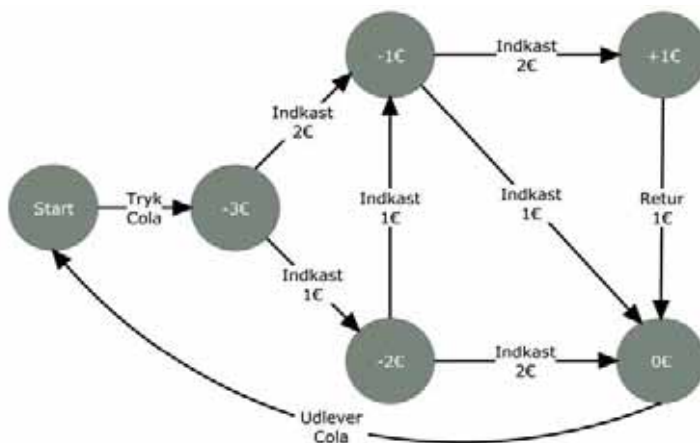
Af Professor Hanne Riis Nielson, Professor Flemming Nielson, Adjunkt Sebastian Nanz og Adjunkt Henrik Pilegaard, DTU Informatik

Et sted i en europæisk lufthavn står en colaautomat, hvor en cola koster 3€. Automaten accepterer kun 1€ og 2€ mønter og fungerer meget enkelt: Først trykker man på "cola" knappen, og derefter indkaster man mønter. Hvis man skal have byttepenge, giver automaten disse mønter tilbage, inden den afleverer colaen. Det er på overfladen et meget simpelt forløb, men hvordan finder automaten ud af, om man har betalt det rigtige beløb?

For at svare på dette skal vi bygge en *model* for, hvordan colaautomaten virker. Modellen vil fokusere på de dele, vi er interesserede i, og den vil ignorere en lang række andre aspekter. Vi ønsker at forstå *logikken* i colaautomaten, og vi er derfor ikke interesserede i tekniske detaljer, som f.eks. hvordan automaten kender forskel på en 1€ mønt og en 2€ mønt for slet ikke at tale om alle mulige andre mønter.

Transitionsdiagrammer

Figur 1 viser en model for colaautomaten – et såkaldt *transitionsdiagram*. Cirklerne modellerer de forskellige *tilstande*, som automaten kan være i, mens pilene fortæller, hvordan tilstandene ændrer sig, når man bruger automaten. Disse ændringer kaldes for *transitioner*, og teksten på pilene kaldes *handling*, og de fortæller, hvad der sker, samtidigt med at tilstanden ændres.



Figur 1. Colaautomatens transitionsdiagram.

Automaten starter i den tilstand, der hedder 'Start'. Pilen med teksten 'Tryk Cola' viser, hvad der sker, når vi trykker på 'Cola' knappen. Automaten ændrer sin tilstand til '-3€' og husker derfor, at vi skal betale 3€, før vi kan få colaen. Hvis vi indkaster en 2€ mønt, så ændrer tilstanden sig endnu en gang og bliver til '-1€'. Automaten husker nu, at vi skal betale yderligere 1€ for at få colaen. Hvis vi nu indkaster en 1€ mønt, så kommer automaten til tilstanden '0€', og den udleverer derefter colaen til os, samtidig med at tilstanden ændres tilbage til 'Start'. Automaten er nu klar til at betjene den næste kunde.

Vi kan opsummere de trin, vi kom igennem, som følger:



Dette kaldes en *transitionssekvens*. Transitionsdiagrammet har mange forskellige transitionssekvenser, og ved at studere dem kan vi lære en del om vores model af colaautomaten. For eksempel har det ingen betydning, hvilken rækkefølge vi indkaster mønterne i. Hvis vi først indkaster 1€ mønten og derefter 2€ mønten, så får vi følgende transitionssekvens:



Hvad nu hvis vi slet ikke har en 1€ mønt og derfor anvender to 2€ mønter i stedet? Da vil automaten gå til tilstanden '+1€' og vil altså huske, at vi har betalt 1€ for meget og derfor skal have byttepenge. Automaten vil nu give en 1€ mønt tilbage, før den udleverer colaen. Det opsummeres i følgende transitionssekvens:



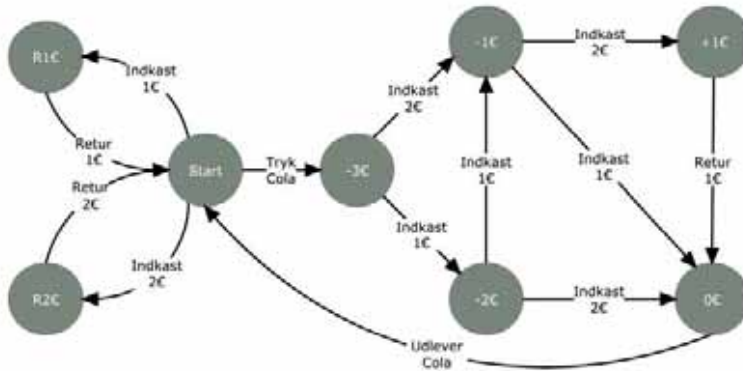
OPGAVE 1



Tegn en transitionssekvens for det tilfælde, hvor du kun betaler med 1€ mønter. Er det muligt at indkaste fire 1€ mønter i træk?

Hvad sker der, hvis vi prøver at indkaste en mønt, før vi trykker på 'Cola' knappen? For at svare på det skal vi først se på, hvilke transitioner der er mulige fra 'Start' tilstanden. Og da der ikke er nogen pile med teksten 'Indkast 1€' eller 'Indkast 2€', så vil det faktisk slet ikke være muligt at indkaste mønterne i vores model!

Vi kan ændre modellen af colaautomaten, så det bliver muligt at indkaste mønter uden at have trykket på 'Cola' knappen først. Der er flere muligheder for, hvad automaten kunne gøre i det tilfælde. Det kan være, at den bare beholder pengene. En anden mulighed er, at den giver pengene tilbage med det samme. Under alle omstændigheder er vi nødt til at ændre på transitionsdiagrammet for at fange vores idé.



Figur 2. Et transitionsdiagram for colaautomaten med tilbagebetaling af mønter.

Vi vil nu ændre transitionsdiagrammet, så automaten returnerer mønter, der indkastes i 'Start' tilstanden med det samme. I figur 2 har vi tilføjet to nye tilstande kaldet 'R1€' og 'R2€'. De husker, at en mønt er blevet indkastet, og sikrer, at den bliver returneret med det samme. Resten af transitionsdiagrammet er præcist som i figur 1.

OPGAVE 2

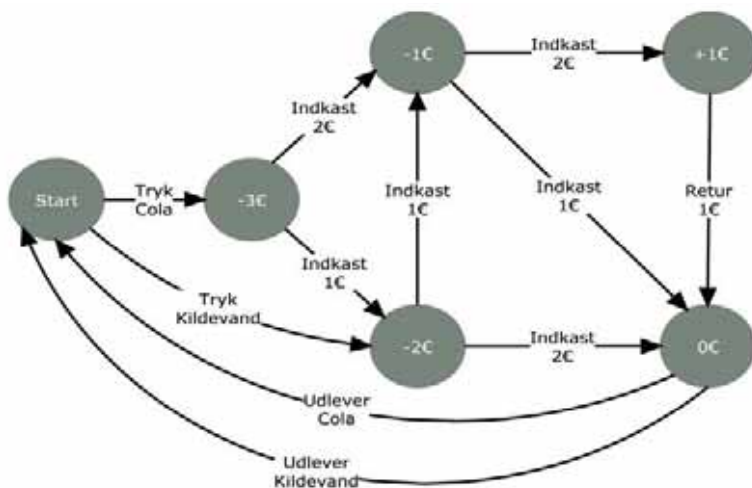


Hvad sker der, hvis vi først trykker på 'Cola' knappen, derefter indkaster en 1€ mønt og så trykker på 'Cola' knappen igen? Og hvad synes du, der burde ske? Hvordan vil du ændre transitionsdiagrammet for at implementere din idé?

Også med kildevand

I en mere avanceret udgave af automaten i lufthavnen kan man også købe en flaske kildevand til 2€. I 'Start' tilstanden har vi derfor valget mellem cola og kildevand. Afhængig af valget skal der altså betales enten 3€ eller 2€, før vi får vores flaske. Hvordan kan vi modellere det?

Lad os først se på transitionsdiagrammet i figur 3. Det er fremkommet ved at tilføje to ekstra transitioner til figur 1: I 'Start' tilstanden kan vi trykke på enten 'Cola' eller 'Kildevand' knappen; i det første tilfælde bliver den næste tilstand '-3€', mens den i det andet tilfælde bliver '-2€'. Afhængig af hvad vi har bestilt, husker automaten, hvor meget der skal betales, og vi kan nu indkaste mønter, indtil vi kommer til tilstanden '0€' og automaten udleverer vores flaske. Men bliver det cola eller kildevand ... man ved jo aldrig!



Figur 3. Et ufuldkommet transitionsdiagram for en automat, som tilbyder cola og kildevand.

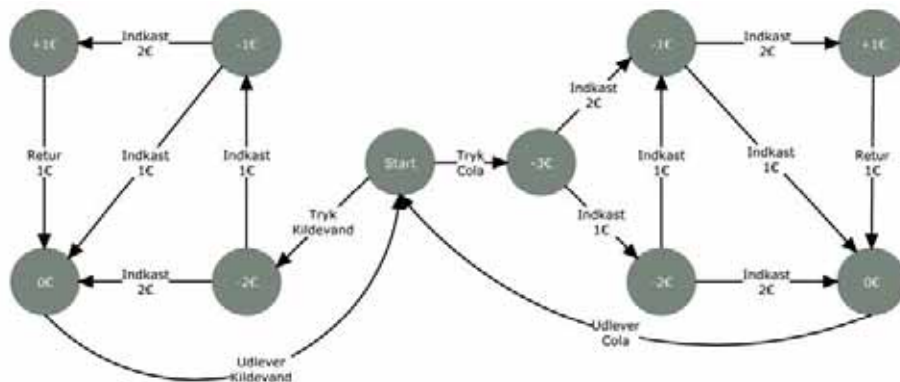
OPGAVE 3

Tegn en transitionssekvens ud fra figur 3, som viser, hvordan man kan bestille en cola, betale for colaen og alligevel ende med at få en flaske kildevand.

Den slags uforudseelig opførsel kaldes for 'ikke-deterministisk opførsel' og er generelt uacceptabelt – vi vil bestemt ikke synes om en colaautomat, der opfører sig sådan. Lad os derfor se på, hvordan vi kan ændre transitionsdiagrammet.

Problemet er selvfølgelig, at automaten kun husker, hvor meget der skal betales, men ikke hvad der er bestilt. Når vi er i tilstanden '-2€', er det uvist, hvor vi kom fra: måske kom vi direkte fra 'Start' (fordi vi ønskede kildevand), men vi kunne også være kommet fra '-3€', hvilket vil sige, at vi havde bestilt cola og derefter indkastet en 1€ mønt.

Løsningen er lige til og er vist i figur 4, hvor vi ganske enkelt har dubleret en del af transitionsdiagrammet fra figur 1. Den venstre side af diagrammet modellerer bestilling og betaling af kildevand, mens den højre side modellerer bestilling og betaling af cola. På denne måde kan forvekslinger undgås.



Figur 4. Et transitionsdiagram for en automat, som tilbyder cola og kildevand.

OPGAVE 4

Vi kan nu se på en variation af situationen i opgave 2: Hvad sker der, hvis vi først trykker på 'Cola' knappen, indkaster en 1€ mønt og derefter trykker på knappen for 'Kildevand'? Og hvad synes du, der burde ske? Hvordan vil du ændre transitionsdiagrammet i figur 4 for at implementere din idé?

Det er nu klart, at transitionsdiagrammerne bliver mere og mere komplekse, efterhånden som vi udvider modellen til at beskrive automater, som kan tilbyde flere typer sodavand, hvor det er muligt at ændre bestillingen midt under betalingen, og hvor det er muligt at bruge flere forskellige slags mønter. Dermed bliver det sværere og sværere at overbevise sig om, at transitionsdiagrammet er en fornuftig model af den virkelige automat.

Transitionssystemer

Et transitionsdiagram er en grafisk repræsentation af et transitionssystem. Et *transitionssystem* er et matematisk objekt, der har en mængde af tilstande og et antal regler for transitioner mellem disse tilstande, og hvor hver transition er markeret med en handling.

Lad os endnu en gang se på *transitionsdiagrammet* i figur 1. Det har seks tilstande og ni transitioner. Det tilsvarende *transitionssystem* har også seks tilstande, en for hver tilstand i *transitionsdiagrammet*. Tabel 1 viser, hvilke regler der er i transitionssystemet. Idéen er, at hver gang vi har beskrevet en transition grafisk i figur 1 ved brug af en pil fra en cirkel til en anden, så har vi en tilsvarende regel i tabel 1 – med den samme handling.

Start	→ Tryk Cola	-3€
-3€	→ Indkast 1€	-2€
-3€	→ Indkast 2€	-1€
-2€	→ Indkast 1€	-1€
-2€	→ Indkast 2€	0€
-1€	→ Indkast 1€	0€
-1€	→ Indkast 2€	+1€
+1€	→ Retur 1€	0€
0€	→ Udlever Cola	Start

Tabel 1. Transitionssystem for figur 1.

Vi har f.eks. en pil med handlingen 'Tryk Cola' mellem tilstandene 'Start' og '-3€' i figur 1, og den tilsvarende linje i tabel 1 er:

$$\text{Start} \xrightarrow{\text{Tryk Cola}} -3\text{€}$$

Vi kan konstruere transitionssekvenser, ganske som vi gjorde før. Det vil sige, at vi stadigvæk har transitionssekvensen

$$\text{Start} \xrightarrow{\text{Tryk Cola}} -3\text{€} \xrightarrow{\text{Indkast 2€}} -1\text{€} \xrightarrow{\text{Indkast 1€}} 0\text{€} \xrightarrow{\text{Udlever Cola}} \text{Start}$$

som viser, hvordan vi kan få cola ved først at trykke på 'Cola' knappen og derefter indkaste en 2€ mønt og en 1€ mønt.

OPGAVE 5 

Udvid tabel 1 til at inkludere de resterende transitioner fra figur 2.

For at beskrive en automat, der tilbyder både cola og kildevand, kan vi nu blot udvide tilstandene med information om, hvad der er bestilt. Det resulterende transitionssystem er beskrevet af reglerne i tabel 2.

For vare	→ {Cola, Kildevand}
Start	→ Tryk Cola (Cola, -3€)
Start	→ Tryk Kildevand (Kildevand, -2€)
(vare, -3€)	→ Indkast 1€ (vare, -2€)
(vare, -3€)	→ Indkast 2€ (vare, -1€)
(vare, -2€)	→ Indkast 1€ (vare, -1€)
(vare, -2€)	→ Indkast 2€ (vare, 0€)
(vare, -1€)	→ Indkast 1€ (vare, 0€)
(vare, -1€)	→ Indkast 2€ (vare, +1€)
(vare, +1€)	→ Retur 1€ (vare, 0€)
(vare, 0€)	→ Udlever vare Start

Tabel 2. Transitionssystem svarende til figur 4.

Den første regel siger, at hvis vi i starttilstanden trykker på 'Cola' knappen, så kommer vi til tilstanden (Cola, -3€). Trykkes der i stedet på 'Kildevand' knappen, så fortæller den anden regel os, at vi kommer til tilstanden (Kildevand, -2€).

De næste syv regler ignorerer, hvilken drikkevare der er bestilt. I tilstandene bruger vi komponenten 'vare' til at huske det, og vi bemærker, at reglerne ikke ændrer på den information. De syv regler udtrykker kun, hvordan selve betalingen håndteres. Den sidste regel i tabellen er ansvarlig for udlevering af drikkevaren.

I virkeligheden svarer hver af reglerne til to regler – en hvor 'vare' er 'Cola', og en anden hvor 'vare' er 'Kildevand'. Lad os se på den sidste regel:

$$(vare, 0€) \rightarrow_{\text{Udlever vare}} \text{Start}$$

Hvis 'vare' står for 'Cola', så bliver reglen til

$$(Cola, 0€) \rightarrow_{\text{Udlever Cola}} \text{Start}$$

og vi får altså udleveret en cola. På den anden side, hvis 'vare' står for 'Kildevand', så bliver reglen til

$$(\text{Kildevand}, 0€) \rightarrow_{\text{Udlever Kildevand}} \text{Start}$$

Vi siger, at disse to regler er *instanser* af den mere generelle regel.

Sidebetingelser

Vi kan stoppe her, idet tabel 2 giver os en kort og præcis repræsentation af transitionsdiagrammet i figur 4. Men lad os alligevel gå et skridt videre.

Hvis vi kigger på reglerne i tabel 2, kan vi se, at nogle af dem ser meget ens ud. For eksempel er der tre regler for indkast af en 1€ mønt:

$$(vare, -3€) \rightarrow_{\text{Indkast 1€}} (vare, -2€)$$

$$(vare, -2€) \rightarrow_{\text{Indkast 1€}} (vare, -1€)$$

$$(vare, -1€) \rightarrow_{\text{Indkast 1€}} (vare, 0€)$$

De er faktisk alle tre instanser af en enkelt mere generel regel, som vi kan skrive som:

$$(vare, værdi) \rightarrow_{\text{Indkast 1€}} (vare, værdi + 1€) \quad \text{hvis } værdi < 0€$$

Hvis 'værdi' står for -3€, så får vi den første af de tre ovenstående regler. Vi kan få de andre regler frem ved at sætte 'værdi' til at være henholdsvis -2€ og -1€. Forudsætningen "hvis værdi < 0€" kaldes en *sidebetingelse*, og den sikrer, at reglen ikke kan anvendes, når f.eks. 'værdi' er lig med 0€. På den måde sikrer vi, at automaten ikke accepterer flere mønter end nødvendigt.

Vi kan anvende det samme trick på de tre regler i tabel 2 for indkast af 2€ mønter. Her får vi så den generelle regel:

$$(vare, værdi) \rightarrow_{\text{Indkast } 2\text{€}} (vare, værdi + 2\text{€}) \quad \text{hvis } værdi < 0\text{€}$$

Også i dette tilfælde sikrer sidebetingelsen, at reglen kun kan bruges i de tilfælde, hvor automaten skal kunne acceptere flere mønter.

De to nye regler for indkast af 1€ mønter og indkast af 2€ mønter ligner faktisk også hinanden:

$$\begin{aligned} (vare, værdi) &\rightarrow_{\text{Indkast } 1\text{€}} (vare, værdi + 1\text{€}) && \text{hvis } værdi < 0\text{€} \\ (vare, værdi) &\rightarrow_{\text{Indkast } 2\text{€}} (vare, værdi + 2\text{€}) && \text{hvis } værdi < 0\text{€} \end{aligned}$$

Vi skal derfor erstatte dem med én enkel regel

$$(vare, værdi) \rightarrow_{\text{Indkast } mønt} (vare, værdi + mønt) \quad \text{hvis } værdi < 0\text{€}$$

hvor nu 'mønt' vil være enten 1€ eller 2€. Denne ene regel kan nu erstatte alle reglerne for at indkaste mønter i tabel 2 – altså hele seks regler!

Lad os opsummere: Tilstandene i vores transitionssystem har nu formen $(vare, værdi)$, hvor 'vare' enten er 'Cola' eller 'Kildevand', og 'værdi' er en af de fem værdier -3€, -2€, -1€, 0€ og +1€. I en tilstand $(vare, værdi)$ har vi tre muligheder:

- $værdi < 0\text{€}$: der skal indkastes flere mønter, og vi skal bruge reglen

$$(vare, værdi) \rightarrow_{\text{Indkast } mønt} (vare, værdi + mønt)$$

hvor 'mønt' enten er 1€ eller 2€.

- $værdi > 0\text{€}$: der er indkastet for mange mønter, og der skal derfor gives byttepenge. Det er præcist beløbet 'værdi', der skal gives tilbage, og det er udtrykt i reglen:

$$(vare, værdi) \rightarrow_{\text{Retur } værdi} (vare, 0\text{€})$$

- $værdi = 0\text{€}$: der er indkastet lige penge, og drikkevaren 'vare' skal udleveres; det udtrykkes i reglen:

$$(vare, værdi) \rightarrow_{\text{Udlever } vare} \text{Start}$$

Dette er opsummeret i tabel 3.



For $vare \in \{\text{Cola, Kildevand}\}$,
 $m\o{on}t \in \{1\text{€}, 2\text{€}\}$, og
 $v\ae rdi \in \{-3\text{€}, -2\text{€}, -1\text{€}, 0\text{€}, 1\text{€}\}$

Start \rightarrow Tryk Cola (Cola, -3€)
 Start \rightarrow Tryk Kildevand (Kildevand, -2€)
 $(vare, v\ae rdi) \rightarrow$ Indkast $m\o{on}t$ $(vare, v\ae rdi + m\o{on}t)$ hvis $v\ae rdi < 0\text{€}$
 $(vare, v\ae rdi) \rightarrow$ Retur $v\ae rdi$ $(vare, 0\text{€})$ hvis $v\ae rdi > 0\text{€}$
 $(vare, v\ae rdi) \rightarrow$ Udlever $vare$ Start hvis $v\ae rdi = 0\text{€}$

Tabel 3. Transitionssystem svarende til figur 4.

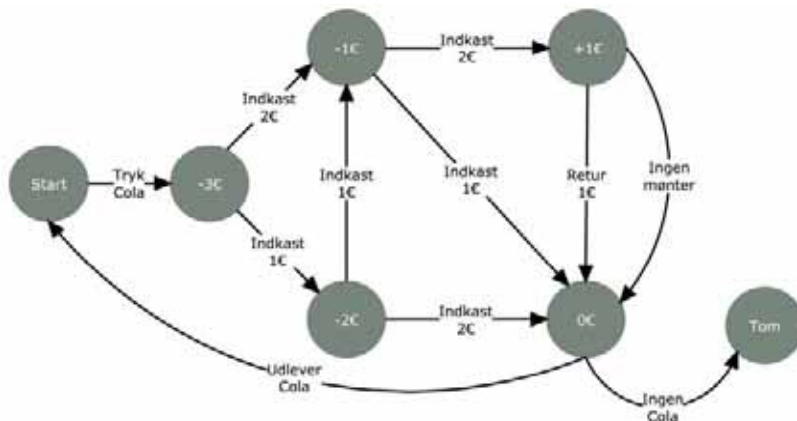
OPGAVE 6

Antag nu, at automaten accepterer tre forskellige mønter: 0,50€, 1€ og 2€. Prisen for cola og kildevand er som før. Udvid transitionssystemet i tabel 3 til at modellere dette.

Data og værdier

Hvad sker der, hvis automaten løber tør for cola? Hvad sker der, hvis den løber tør for byttepenge?

Lad os endnu en gang kigge på transitionsdiagrammet i figur 1. Hvis vi er i tilstanden '+1€', og automaten ikke indeholder flere 1€ mønter, så er det selvfølgelig umuligt at udføre handlingen 'Retur 1€'. Vi siger, at automaten er kommet til en død tilstand – det er umuligt at ændre tilstanden til '0€', og automaten kan derfor heller ikke udføre handlingen 'Udlever Cola' til trods for, at vi har betalt 4€ for at komme til '+1€' tilstanden.



Figur 5. Transitionsdiagram for en colautomat, som kan håndtere at løbe tør for mønter eller drikkevarer.

Der er flere måder at forbedre transitionsdiagrammet på. En mulighed er vist i figur 5. Hvis automaten er løbet tør for byttepenge, så vil den sælge en cola for 4€, indtil den får nogle 1€ mønter. Hvis den derimod er løbet tør for cola, så går den i tilstanden 'Tom', som er en død tilstand. Nu skal automaten fyldes op, før den kan bruges igen.

Men det ville nu være bedre, hvis automaten kunne holde styr på, hvor mange mønter den indeholder, og hvor mange flasker der er tilbage af de forskellige drikkevarer. Så lad os se på, hvordan det kan lade sig gøre.

Idéen er at udvide tilstandene med denne information. I stedet for parret (*vare*, *værdi*) kunne vi anvende tre komponenter (*vare*, *værdi*, *antal-1€*), hvor den sidste komponent tæller antallet af 1€ mønter i automaten. Hvis vi også vil holde styr på beholdningen af drikkevarer, må vi tilføje endnu to komponenter, en for cola og en for kildevand.

Det kan hurtigt blive lidt uoverskueligt, så lad os prøve at samle al informationen i en lille tabel. Et eksempel er:

vare	Cola
værdi	0€
antal-cola	3
antal-kildevand	5
antal-1€	2
antal-2€	7

Tabellen består af seks rækker bestående af navnet på et felt og den tilhørende værdi. Bemærk, at '*vare*' og '*værdi*' er nu en del af tabellen – de svarer til de to første felter i tabellen. De øvrige felter indeholder information om antallet af flasker og mønter i automaten.

Vi skal nu bruge sådanne tabeller som tilstande i vores transitionssystem. Hvis t er en tilstand, dvs. en tabel som den ovenfor, så kan vi få fat i værdien af feltet f ved at skrive $t(f)$. Så f.eks. er $t(\text{antal-cola})$ antallet af cola i automaten i tilstanden t , dvs. 3 for tilstanden ovenfor.

Hver gang en cola udleveres, skal vi opdatere tilstanden ved at trække en fra antallet af colaflasker – de øvrige felter i tilstanden er uændrede. Det er udtrykt i reglen

$$t \xrightarrow{\text{Udlever Cola}} t' \quad \text{hvis } t(\text{vare}) = \text{Cola og } t(\text{værdi}) = 0\text{€} \\ \text{og hvor } t' = t[\text{antal-cola} := t(\text{antal-cola}) - 1]$$

Sidebetingelsen $t(\text{vare}) = \text{Cola}$ sikrer, at automaten udleverer den vare, der er bestilt (nemlig cola), mens betingelsen $t(\text{værdi}) = 0\text{€}$ sikrer, at varen er betalt. Den nye tilstand kaldes t' , og den er lig med den gamle tilstand t bortset fra, at der nu er en cola mindre i lageret. Vi skriver det som

$$t' = t[\text{antal-cola} := t(\text{antal-cola}) - 1]$$

hvor $t(\text{antal-cola})$ jo er beholdningen, inden colaen bliver udleveret. Hvis f.eks. t er tilstanden ovenfor, så vil t' være følgende tilstand:

vare	Cola
værdi	0€
antal-cola	2
antal-kildevand	5
antal-1€	2
antal-2€	7

På tilsvarende måde skal vi hver gang, der indkastes en mønt, opdatere tilstanden til at addere én til det relevante møntfelt, samtidig med at vi skal opdatere 'værdi' feltet. Vi vil altså have en regel som følger:

$$t \xrightarrow{\text{Indkast } 2\text{€}} t' \text{ hvis } t(\text{værdi}) < 0\text{€}$$

$$\text{og hvor } t' = t [\text{værdi} := t(\text{værdi}) + 2\text{€}; \text{antal-2€} := t(\text{antal-2€}) + 1]$$

Sidebetingelsen $t(\text{værdi}) < 0\text{€}$ sikrer, at vi kun accepterer, at mønter indkastes, når ikke alle pengene er blevet betalt. Vi laver nu opdateringer i to af felterne i tilstanden ved at skrive:

$$t' = t [\text{værdi} := t(\text{værdi}) + 2\text{€}; \text{antal-2€} := t(\text{antal-2€}) + 1]$$

Vores transitionssystem vil altså have de små tabeller som tilstande. Men hvordan ser starttilstanden egentlig ud? Hvilken værdi skal feltet 'vare' have? I starttilstanden er der jo ikke bestilt nogen drikkevare, så vi skal ganske simpelt sige, at feltet har værdien 'Ingen'.

For $vare \in \{\text{Cola, Kildevand, Ingen}\}$,
 $mønt \in \{1\text{€}, 2\text{€}\}$, og
 Cola-pris = 3€, Kildevand-pris = 2€

$t \xrightarrow{\text{Tryk vare}} t'$ hvis $t(\text{vare}) = \text{Ingen}$ og $t(\text{antal-vare}) > 0$,
 og hvor $t' = t [\text{vare} := \text{vare};$
 $\text{værdi} := - \text{vare-pris}]$

$t \xrightarrow{\text{Indkast mønt}} t'$ hvis $t(\text{værdi}) < 0\text{€}$,
 og hvor $t' = t [\text{værdi} := t(\text{værdi}) + \text{mønt};$
 $\text{antal-mønt} := t(\text{antal-mønt}) + 1]$

$t \xrightarrow{\text{Retur 1€}} t'$ hvis $t(\text{værdi}) > 0\text{€}$ og $t(\text{num-1€}) > 0$,
 og hvor $t' = t [\text{værdi} := t(\text{værdi}) - 1\text{€};$
 $\text{num-1€} := t(\text{num-1€}) - 1]$

$t \xrightarrow{\text{Udlever vare}} t'$ hvis $t(\text{vare}) = \text{vare}$ og $t(\text{værdi}) \geq 0\text{€}$
 og hvor $t' = t [\text{antal-vare} := t(\text{antal-vare}) - 1;$
 $\text{vare} := \text{Ingen}]$

Table 4. Transitionssystem, som holder rede på antallet af drikkevarer og mønter.

Det resulterende transitionssystem er vist i tabel 4. Der er kun fire regler, en for hver af de mulige handlinger. Den første regel går fra starttilstanden til en tilstand, hvor vi ikke blot husker, hvilken vare vi har bestilt, men også dens pris – og det er kun muligt at foretage denne transition, hvis varen faktisk er på lager i automaten. Den anden regel tager sig af betalingen, og i fald der skal gives byttepenge, så tager den tredje regel sig af det. Endelig vil den fjerde regel udlevere drikkevaren – og samtidig notere, at der nu ikke længere er bestilt en drikkevare.

OPGAVE 7



Automaten i tabel 4 muliggør stadigvæk overbetaling for drikkevarer. Hvad er det for en regel, der gør dette muligt? Hvad sker der med de penge, der bliver betalt for meget? Kan du forbedre transitionssystemet?

OPGAVE 8



Antag nu, at vores automat har en begrænset kapacitet til mønter: der er en beholder til 1€ mønter, som kan indeholde max-1€ mønter, og en anden beholder til 2€ mønter, som kan indeholde max-2€ mønter. Når en beholder er fuld, er det ikke længere muligt at indkaste den type mønter. Hvordan vil du modificere transitionssystemet i tabel 4 til at tage højde for det?

OPGAVE 9



En mere brugervenlig version af automaten har en ”fortryd” knap, der tillader kunden at afbryde transaktionen når som helst. Den har også en lille pære, som lyser, når automaten løber tør for 1€ mønter eller en bestemt type drikkevarer. Hvordan vil du ændre transitionssystemet i tabel 4 til at modellere denne automat?

Brugen af en lille tabel som tilstand hjælper os ikke kun med at nedskrive de nødvendige regler, men også med at fokusere på de vigtige dele af automatens logik. Vi kan f.eks. se, at der er mange forskellige tilstande, hvor automaten vil være klar til at tage imod en ordre – det er jo ligegyldigt, hvor mange mønter og flasker der er i den, når blot der er nok til at efterkomme den næste ordre.

Hvordan vil vi tegne et transitionsdiagram svarende til transitionssystemet i tabel 4? For hver mulig tilstand skal vi først tegne en cirkel, og derefter skal vi tilføje pile mellem cirklerne, en for hver transition mellem tilstandene. Det bliver hurtigt uoverskueligt for et transitionssystem som det i tabel 4!

OPGAVE 10

Hvor mange forskellige starttilstande kan automaten være i, når vi går ud fra, at den kan indeholde maksimalt tyve flasker af hver af cola og kildvand, halvtreds 2€ mønter og et hundrede 1€ mønter?

Kontrolpunkter

Den forrige opgave viser fordelene ved den tekstuelle repræsentation, idet vi meget kort og præcist kan repræsentere selv meget store systemer. Nogle gange er det alligevel en fordel at have en grafisk repræsentation af transitionssystemet – men det skal selvfølgelig være med grafer, der er til at overskue.

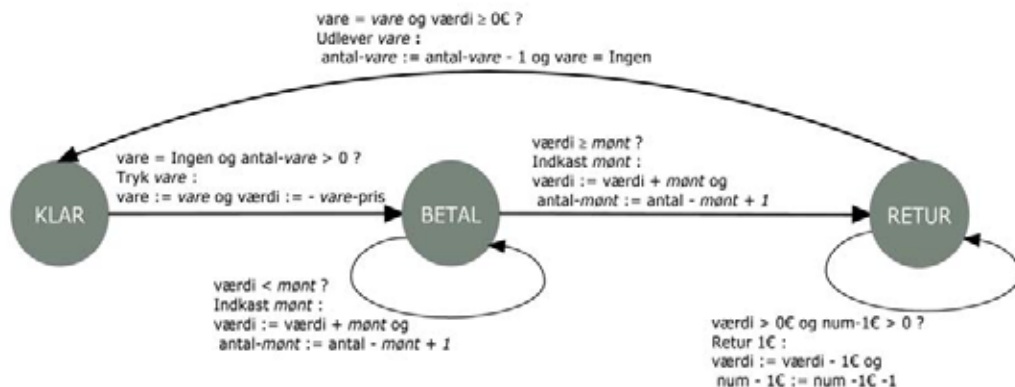
Når vi tænker på vores automat, så vil den gennemgå en cyklus med tre faser:

- KLAR: automaten er klar til at modtage vores ordre,
- BETAL: automaten modtager vores indkastede mønter, og
- RETUR: automaten udleverer flaske og eventuelle byttepenge.

For hver tilstand t er det let at sige, hvilken af de tre faser den hører til i:

- t er en KLAR tilstand hvis $t(\text{vare}) = \text{Ingen}$
- t er en BETAL tilstand hvis $t(\text{værdi}) < 0\text{€}$ og $t(\text{vare}) \neq \text{Ingen}$
- t er en RETUR tilstand hvis $t(\text{værdi}) \geq 0\text{€}$ og $t(\text{vare}) \neq \text{Ingen}$

Vi kan nu fokusere på disse faser, når vi tegner vores transitionsdiagram; resultatet ses i figur 6.



Figur 6. Transitionsdiagram med kontrol og dataopdateringer svarende til tabel 4.

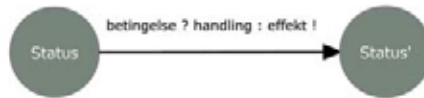
For hver af de tre faser har vi nu tegnet en cirkel i diagrammet – de repræsenterer kontrolpunkter. Pilene imellem dem svarer til reglerne i tabel 4, men nu er de ikke blot

markeret med handlinger, men også med betingelserne for, at reglen kan anvendes, og instrukserne for, hvordan den nye tilstand skal se ud – de tjekker og opdaterer *data* knyttet til kontrolpunkterne. Lad os se, hvordan de fremkommer.

Den generelle form af reglerne i tabel 4 er

$$t \xrightarrow{\text{handling}} t' \quad \text{hvis betingelse, og hvor opdatering}$$

hvor betingelsen altid refererer til t , og opdateringen fortæller, hvordan t' ser ud i forhold til t . Hvis t og t' svarer til forskellige kontrolpunkter, så vil det give anledning til en pil mellem to cirkler, som har følgende tekst tilknyttet:



For at øge læseligheden har vi simplificeret betingelserne og opdateringerne til en kortere notation i figur 6. Som nævnt refererer betingelsen altid til den oprindelige tilstand t , og vi kan derfor lade være med at nævne t . Vi skriver f.eks.

$$\text{værdi} < 0 \quad \text{i stedet for} \quad t(\text{værdi}) < 0.$$

Alle opdateringer vil beskrive den nye tilstand ud fra den gamle, så her vil vi f.eks. skrive

$$\text{værdi} := \text{værdi} - \text{mønt} \quad \text{i stedet for} \quad t' = t [\text{værdi} := t(\text{værdi}) - \text{mønt}].$$

Bemærk, at reglen for betaling i tabel 4 giver anledning til to pile i figur 6 – en for det tilfælde, hvor vi har betalt alle pengene, og en, hvor vi stadig skal kaste flere mønter ind.

Hvorfor er transitionssystemer interessante?

Transitionsdiagrammer og transitionssystemer giver os en *model* af et system. Modellen fanger de dele af systemet, som vi har valgt at fokusere på, og vi kan studere denne del uden at bekymre os om alle detaljerne i systemet. I mange tilfælde vil man konstruere en model af et system, før man implementerer det, og dermed sikre, at modellen har de ønskede egenskaber. Det er nu engang både nemmere og billigere at rette fejlene i en model end i det endelige produkt.

Hvilke egenskaber kunne man så ønske at sikre sig, at en model har? I tilfældet med vores colaautomat vil man f.eks. gerne vide, at hvis man trykker på 'Cola' knappen og betaler 3€, så får man også en cola. Som vi har set, er der nogle modeller, der opfylder dette krav, men ikke alle. Modellen udtrykt ved transitionsdiagrammet i figur 5 opfylder ikke kravet; det er let at se ved at konstruere en passende transitionssekvens. Det er noget vanskeligere at overbevise sig om, at modellen givet ved transitionssystemet i tabel



4 opfylder kravet – her skal vi faktisk overbevise os om, at uanset hvordan vi bruger automaten, så vil kravet være opfyldt.

I datalogien er der udviklet nogle teknikker og værktøjer, som gør denne form for ræsonnement lettere. Idéen er, at man udtrykker den ønskede egenskab med en logisk formel, og så anvender man et såkaldt *verifikationsværktøj* til *automatisk* at analysere modellen. Hvis værktøjet siger, at egenskaben er opfyldt, ja så har man faktisk også et matematisk bevis på, at modellen har egenskaben. Og hvis værktøjet siger, at egenskaben ikke er opfyldt, så vil det i mange tilfælde også kunne give et modbevis på det – som f.eks. en transitionssækvens, hvor egenskaben ikke gælder.

De modeller, vi har set på her, omhandler kun *diskrete* handlinger: enten er der en transition fra en tilstand til en anden, eller også er der ikke. De egenskaber, der kan bevises på basis af sådanne modeller, vil også være diskrete: enten kan vi garantere, at vi *altid* kun kommer til at betale 3€ for en cola, eller også kan vi ikke. Det er f.eks. ikke muligt at vise, at i 90 % af tilfældene kommer vi kun til at betale 3€ for en cola.

Hvis vi vil se på den type egenskaber, så skal vi have fat i transitionssystemer, som også kan modellere *stokastiske* aspekter. Vores colautomat kan kun indeholde et bestemt antal flasker, men hvor mange af dem skal være cola, og hvor mange skal være kildevand? Automaten har også en begrænset beholder til mønter – hvor mange 1€ mønter skal der være plads til i forhold til 2€ mønter? Det er muligt at udvide transitionssystemerne med stokastisk information om, hvordan automaten bruges. Og derefter er det f.eks. muligt at komme med et bud på, hvordan det er bedst at konfigurere automaten, så der er så få kunder som muligt, der bliver utilfredse. Og vi kan bruge verifikationsværktøjer til at undersøge, om vi i mindst 90 % af tilfældene kan få en cola til de 3€, den faktisk koster.

Selvfølgelig er det vigtigt, at en colaautomat fungerer, som den skal – men der er en række andre, langt vigtigere systemer, hvor det er vitalt, at de fungerer som de skal, og at de udnytter de tilgængelige ressourcer bedst muligt. Det er her, transitionssystemerne, som vi har set, for alvor kommer til deres ret, og det er her, de bliver kombineret med stærke verifikationsværktøjer, så man kan få de nødvendige garantier for deres opførelse. Vi kan her tænke på de avancerede computersystemer, der er i fly, i biler og i kraftværker – de skal altså bare fungere! Og vi kan tænke på finanssektoren og sundhedssystemet, hvor mange af de daglige rutiner i dag er computerstyrede. Men de samme teknikker har også anvendelse inden for modellering og analyse af serviceorienterede systemer, hvor mobiltelefoner interagerer med web-systemer på en, til tider, ret uforudsigelig måde.

Artiklens forfattere



Professor Hanne Riis Nielson



Professor Flemming Nielson



Adjunkt Sebastian Nanz



Adjunkt Henrik Pilegaard



Wavelets – forbrydernes skræk

Af Docent Ole Christensen, DTU Matematik

USA's forbundspoliti Federal Bureau of Investigation (FBI) har over 30 millioner fingeraftryk i deres arkiv, og de modtager 30.000 nye hver dag. Fingeraftrykkene var i mange år gemt i papirform og fyldte et areal svarende til en fodboldbane. Sammenligning af fingeraftryk foregik manuelt. I dag er arkivet lagret digitalt, og søgning og sammenligning foregår elektronisk.

Et fingeraftryk indeholder talrige informationer, og det kræver enorm kapacitet at lagre data fra over 30 millioner sæt fingeraftryk á 10 fingre. Faktisk har FBI's arkiv en størrelse, så ingen computer kan rumme de enorme mængder information og foretage søgning og sammenligning inden for et rimeligt tidsinterval. Det er her, at matematikken spiller en uhyre vigtig rolle. Ved hjælp af wavelet-teori er det nemlig lykket at komprimere store datamængder på en måde, som nu gør det muligt elektronisk at søge efter et matchende fingeraftryk i arkivet.

Et fingeraftryk kan betragtes som et billede, og billeder kan opfattes som følger af tal. Billeder i god opløsning kræver rigtig mange tal. I dette kapitel ses eksempler på, hvordan man kan reducere datamængden i billeder på en sådan måde, at billedkvaliteten og de væsentlige informationer i fingeraftrykkene bevares. Netop wavelet-teorien har sat FBI i stand til at opklare 800 henlagte kriminalsager.

Digitale billeder

Forskningsområdet wavelets udvikles i tæt samarbejde mellem matematikere og ingeniører. Teorien for wavelets har kun eksisteret i ca. 20 år, men har allerede fundet vigtige anvendelser. Wavelets indgår f.eks. i den internationale standard for billedbehandling, JPEG2000, og wavelets spiller en central rolle i forbindelse med komprimering af store datamængder, og den praktiske betydning heraf.

Billeder (og videoer) kan opfattes som følger af tal – og store billeder i god opløsning kræver mange tal. Et digitalt billede i sort-hvid består af et antal pixels, dvs. små felter eller kvadrater. Hver af disse pixels er tildelt en gråtone på en skala fra f.eks. 0 (helt hvid) til 100 (helt sort): gråtonen fortæller, hvilken farvenuance billedet har det pågældende sted. Hele billedet kan herved beskrives ved en række af talpar, der nummererer felterne og angiver de tilhørende gråtoner. Jo finere opløsning der er valgt, jo flere pixels er der, og jo flere talpar skal der bruges for at beskrive billedet.



Figur 1a.



Figur 1b.

Som illustration kan vi betragte kronhjortene på figur 1. Udgaven på figur 1(a) er i en relativt god opløsning (små pixels), mens udgaven på figur 1(b) har dårlig opløsning, man kan eksempelvis tydeligt se de forskellige pixels og tror næsten, hjortene er lavet af legoklodser!

Hvis man ønsker at opnå et billede i høj kvalitet, er den umiddelbare løsning derfor at benytte små pixels. Her skal man blot være opmærksom på, at datamængden vokser hurtigt, når man øger antallet af pixels. Hvis man eksempelvis benytter 256×256 pixels, vil billedet blive beskrevet af 65.536 tal. Hvis vi reducerer sidelængden af vores pixels til en fjerdedel, får vi 1024×1024 pixels og dermed en datamængde bestående af 1.048.576 tal, altså en seksten gange større datamængde!

Komprimeringsteknik

Når man blot betragter et enkelt billede, er det normalt ikke noget problem at opnå en fin opløsning. Moderne computere kan sagtens håndtere den nødvendige datamængde. Men hvis man ønsker at betragte mange billeder (f.eks. en video, der jo består af en lang række billeder), kan der opstå vanskeligheder. Datamængden kan blive så stor, at computeren ikke kan behandle billederne og vise dem inden for en fornuftig tidsramme. Dette har vist sig at give særlige vanskeligheder, når man ønsker at modtage informationerne samtidig med, at de sendes (f.eks. i forbindelse med fjernsynsmodtagelse eller videoklip på internettet).

I praksis forsøger man at løse sådanne problemer ved hjælp af komprimeringsteknikker, der kort sagt virker ved, at man reducerer datamængden på en sådan måde, at billedkvaliteten bevares. Man kan få en intuitiv forståelse af, hvordan disse teknikker virker, ved at studere kronhjortene på figur 1. På grund af den simple struktur, der er i billedet (hjorte/græs), er gråtonerne næsten konstante over store områder! For at beskrive farvevariationerne i den første række pixels behøver vi ikke at se på 256 pixels med forskellige gråtoner, men kan koncentrere os om de 4-5 forskellige nuancer, der faktisk optræder. Det er dog klart, at der er et stykke vej fra denne intuitive beskrivelse til at udføre komprimeringen i praksis. Vi vil i næste afsnit se på et lille taleksempel, der viser, hvordan man kan reducere datamængden.

Wavelet-metoden

Digitale billeder i fornuftig kvalitet vil normalt som nævnt beskrives ved hjælp af store mængder data. Med wavelet-metoden kan man reducere datamængden uden nævneværdigt tab af kvaliteten. Vi vil nu illustrere metoden med et lille eksempel. For overskuelighedens skyld udføres regningerne på et ganske kort datasæt bestående af 8 tal.

Eksempel 1.

Vi betragter følgende tal:

56	40	8	24	48	48	40	16
----	----	---	----	----	----	----	----

Ved at nummerere tallene fra 1 til 8 kan vi repræsentere tallene grafisk ved at forbinde punkterne

(1, 56), (2, 40), (3, 8), (4, 24), (5, 48), (6, 48), (7, 40), (8, 16)

med en kurve (se figur 2 (a)).

Til disse otte tal vil vi nu knytte otte andre tal, som fremkommer på følgende måde.

Først opfatter vi tallene i tabellen som en serie på fire talpar hver indeholdende to tal:
 (56,40), (8,24), (48,48), (40,16)

Hvert talpar erstatter vi nu af to nye tal, der er definerede som henholdsvis gennemsnittet af de givne tal og forskellen mellem det første tal i parret og den fundne gennemsnitsværdi. Det første talpar i det givne talsæt består af tallene 56 og 40; ovenstående procedure giver os det nye talpar $\frac{56+40}{2} = 48, 56-48 = 8$. Ved at udføre denne proces på alle fire talpar får vi følgende resultat:

48	8	16	-8	48	0	28	12
----	---	----	----	----	---	----	----

I formelsprog er der sket det, at hvert talpar (a, b) er blevet erstattet af et nyt talpar (g, d) , der er givet ved

$$g = \frac{a+b}{2}, d = a - \frac{a+b}{2}$$

Bogstavsbetegnelserne er valgt, så de understreger, at g er beregnet som et gennemsnit, og at d er beregnet som en *difference*. Lad os skrive den nye talrække op under den gamle talrække:

56	40	8	24	48	48	40	16
48	8	16	-8	48	0	28	12

De nye tal i tabellens anden række kan siges at indeholde den samme information som de oprindelige tal i den første række, i den forstand at vi kan komme tilbage til de oprindelige tal, når vi kender den anden række. Vi løser simpelthen ligningerne (1) med hensyn til a, b og får at

$$a = g + d, b = g - d. \quad (2)$$

Man taler om *rekonstruktion* af den oprindelige information. Hvis det handler om at lagre informationerne eller at sende dem, kan man altså lige så godt arbejde med den anden række som med den første – man skal bare huske på et vist tidspunkt at regne tilbage. Imidlertid er det endnu ikke klart, hvad der er vundet ved omformningen.

Vi gemmer dette spørgsmål lidt endnu og udfører processen en gang til, men kun på de fire tal i tabellen, der blev beregnet som gennemsnitsværdier. Med andre ord lader vi tallene

$$8, -8, 0, 12$$

stå i tabellen og gentager processen på tallene

$$48, 16, 48, 28,$$

dvs. på talparrene

$$(48,16) (48,28).$$

Vi beregner altså gennemsnit og difference hørende til hvert af disse talpar. Dette leder til tallene 32, 16, 38, 10, der placeres på de ledige pladser i skemaet; herved fås

32	8	16	-8	38	0	10	12
----	---	----	----	----	---	----	----

Også disse otte tal repræsenterer den samme information som det oprindelige talsæt: vi skal blot regne tilbage to gange for at komme tilbage til det oprindelige talsæt. Der er dog også lidt bogholderi involveret – vi skal sørge for at holde styr på, hvilke tal der er beregnet som gennemsnitstal, og hvilke der er differencer.

Som sidste omformning gentager vi processen på tallene 32, 16, 38, 10. Tallene 16, 10 fandt vi som differencer, så dem lader vi stå i tabellen; tallene 32, 38 fandt vi som gennemsnit, så dem erstatter vi med deres gennemsnit 35 og differencen $32 - 35 = -3$. Herved når vi frem til tabellen

35	8	16	-8	-3	0	10	12
----	---	----	----	----	---	----	----

(3)

Indtil nu har vi kun redegjort for, at de udførte operationer ikke ændrer på informationsmængden og at vi kan komme tilbage til de oprindelige tal igen ved gentagen brug af formlen (2). Vi har heller ikke demonstreret, at vi har opnået noget som helst: vores datasæt består stadigvæk af 8 tal.

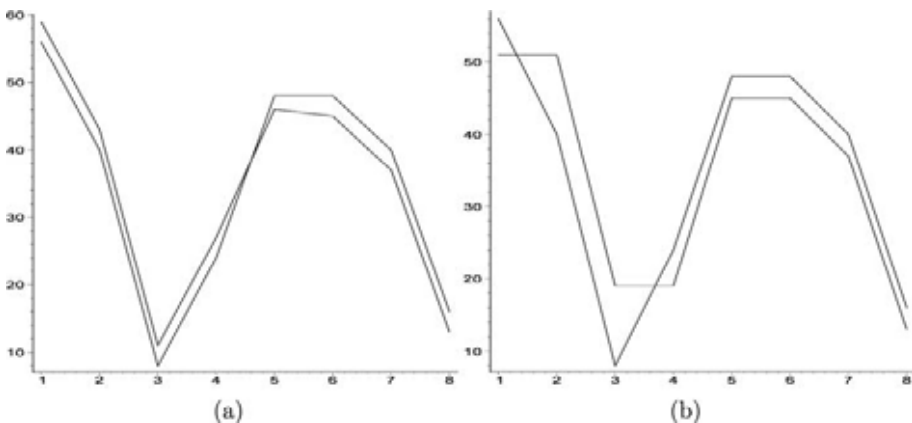
Komprimeringsteknikken kommer nu ind ved, at vi udfører thresholding på tallene i den endelige tabel. Populært sagt betyder dette, at vi smider de små tal væk, eller mere præcist, erstatter dem med nuller. Hvis vi f.eks. vælger at smide alle tal, der numerisk er mindre end 4, væk, får den endelige tabel formen

35	8	16	-8	0	0	10	12
----	---	----	----	---	---	----	----

Hvis vi nu udfører rekonstruktionen (altså regner tilbage i tre trin, baseret på formlen (2)) baseret på disse tal, vil vi ende med tallene i første række forneden; til sammenligning gentager vi det oprindelige talsæt i anden række:

59	43	11	27	45	45	37	13
56	40	8	24	48	48	40	16

Tallene i første række ligger tæt på vores oprindelige talsæt. Som illustration er tallene i det oprindelige talsæt og i det rekonstruerede talsæt afbildet på figur 2 (a).



Figur 2. Originalt talsæt og rekonstruktion med thresholding ved 4, hhv. 9.

Hvis vi havde været grovere og havde brugt thresholding ved at smide alle tal mindre end 9 væk, så var tabellen i (3) blevet omformet til

35	0	16	0	0	0	10	12
----	---	----	---	---	---	----	----

I dette tilfælde havde rekonstruktionen givet (vi skriver igen det oprindelige talsæt op i anden række til sammenligning)

51	51	19	19	45	45	37	13
56	40	8	24	48	48	40	16

Talfølgen opnået ved rekonstruktion efter denne thresholding er stadigvæk i mange tilfælde en acceptabel tilnærmelse til det oprindelige talsæt. Det er her nøglen til besparelserne ligger: ved at udføre thresholding på et transformeret talsæt kan man opnå, at en relativt stor del af tallene er nul: i det sidste eksempel kan vi nøjes med at lagre de fire tal 35, 16, 10, 12 i stedet for otte tal og stadigvæk med god tilnærmelse komme tilbage til det oprindelige talsæt. Her skal ikke gives noget matematisk argument for, at ovenstående også virker på andre eksempler end det givne, men i områder, hvor det betragtede talsæt ikke varierer ret meget, er det oplagt, at mange differencer vil være små og altså via thresholding kan erstattes med nuller. Som afslutning skal blot nævnes, at mere generelle wavelet-metoder fås ved at erstatte de her benyttede operationer (gennemsnit og differens) med andre regneoperationer. I praksis kan man herved opnå endnu bedre resultater end beskrevet her.

Wavelets og fingeraftryk

FBI i USA anvender som nævnt i indledningen digitale arkiver til at gemme fingeraftryk. Et fingeraftryk kan jo betragtes som et lille billede. Derfor kan et fingeraftryk også sendes fra en adresse til en anden ved, at man transmitterer den følge af tal, der beskriver billedet. Problemet er imidlertid, at hvis man skal have en fornuftig detaljeringsgrad, vil hvert fingeraftryk med ovenstående metode blive omformet til elektroniske informationer, der fylder ca. 13 Mb, svarende til 1/6 af kapaciteten på en almindelig cd-rom. Der er derfor behov for en metode til at repræsentere informationerne ved brug af færre data, så de væsentlige informationer i fingeraftrykkene alligevel bliver bevaret, og her kommer wavelets ind i billedet. FBI havde i nogen tid vidst, at wavelets er gode til at fremstille mange typer signaler ved hjælp af få tal, og enden på historien blev faktisk, at FBI besluttede sig til at bruge en variant af de wavelets, vi har betragtet her, til formålet. Mere præcist anvendes de såkaldte Daubechies' biortogonale spline wavelets. I den konkrete situation viste det sig, at man ved at repræsentere et fingeraftryk ved hjælp af wavelets kan nøjes med at gemme 8 % af de oprindelige informationer. Metoden til kompression har fået det imponerende navn The Wavelet Scalar Quantization Gray-scale Fingerprint Image Compression Algorithm, der dog i daglig tale kaldes WSQ. Det grundlæggende eksempel nævnt tidligere i kapitlet giver en del af forklaringen på, at en så stor kompression kan opnås. Et fingeraftryk har jo som de fleste andre billeder en vis struktur, der gør, at rækken af gråtoner ikke er tilfældige tal. I eksemplet med kronhortene vil gråtonerne være næsten konstante over store flader som pels og græs-

set og kun udvise væsentlige variationer ved f.eks. gevir, øjne og ører; et tilsvarende fænomen gør sig gældende for fingeraftryk. Som beskrevet i eksempel 1 giver områder med ensartede gråzoner (og dermed små differencer) gode muligheder for kompression via thresholding, og i det konkrete eksempel med fingeraftryk fås altså et særdeles godt resultat.



Figur 3 viser henholdsvis et originalt fingeraftryk og den komprimerede udgave.

Anvendelsen af wavelets til kompression af fingeraftryk er kun en blandt mange succeshistorier. Tilbage i 1986 gik en gruppe forskere sammen og dannede JPEG (Joint Photographic Experts Group) med det formål at udvikle internationale standarder for billedkompression. Også her er det grundlæggende ønske at kunne transmittere billeder uden at bruge for meget kapacitet. Som illustration nævnes, at transmission af et farvebillede (i fornuftig kvalitet) bestående af 1024×768 pixels kræver ca. 12 MB. I forbindelse med internettet vil en 1 GB-forbindelse transmittere dette billede på 0,1 sekund, men har man kun 64 KB til rådighed, vil det tage ca. 7 minutter. I dette tilfælde er kompression altså nødvendig for at få et brugbart resultat. Den nyeste version af JPEG's standard for kompression hedder JPEG2000, og den anvender også biortogonale spline wavelets.

Artiklens forfatter



Docent Ole Christensen





MATEMATIK IGennem MILLENNIER

Europæisk matematik fra renæssancen til 1900-tallet

De græske tanker og idéer i filosofi og matematik slog for alvor igennem i Europa ved slutningen af den middelalderlige periode. De klassiske græske tekster om geometri og talteori samt de tekster om algebra og trigonometri, som blev udviklet af araberne, blev oversat til latin og derved almindelig kendt blandt lærde folk. Oprettelsen af mange nye universiteter i kombination med opfindelsen af bogtrykkerkunsten og dermed øget tilgængelighed af masseproducerede bøger om matematik skubbede yderligere til denne udvikling. Blandt de indflydelsesrige bøger kan nævnes *Libro de Algebra* publiceret i 1532 af den berømte portugisiske matematiker Pedro Nunes (1502-1578), *Arithmetica Integra* publiceret i Tyskland 1544 af Michael Stifel og den første engelske algebratekst *The Whetstone of Witte*, hvori tegnet '=' for lighed blev indført, publiceret i 1557 af Robert Recorde.

Det var alt sammen del af en meget bredere åndelig opvågning, der spredte sig igennem Europa i det sekstende århundrede fra Italien, i særdeleshed Firenze, hvor de stolte bidrag til kultur og civilisation i det antikke Grækenland og i Rom blev beundret. Fra omkring 1500 bliver perioden kaldt renæssancen, som betyder 'genfødsel'. I løbet af renæssancen begyndte europæerne at bidrage med nye resultater og opdagelser i matematikken, og frem til omkring 1940 var Europa centrum for den matematiske udvikling.

Løsningen af kubiske ligninger

En tidlig matematisk landvinding i renæssancen var opdagelsen af løsningsalgoritmen til forskellige typer af algebraiske ligninger af grad 3 gjort af Scipione del Ferro (1465-1526) og Niccolo Tartaglia (1500-57). Metoden, som araberne forgæves havde eftersøgt, blev publiceret af Girolamo Cardano (1501-1576) i hans *Ars Magna* (1545) sammen med løsningsalgoritmen til algebraiske ligninger af grad 4 opdaget af Ludovico Ferrari (1522-65). I formlen for den kubiske ligning kan der optræde kvadratrødder af negative tal. Dette motiverede Rafael Bombelli (1526-72) til i et arbejde om algebra fra 1572 at udvikle en teori for regning med sådanne tal. Mange matematikere betragtede de nye tal som mystiske, og den franske filosof René Descartes (1596-1650) kaldte dem i et arbejde fra 1637 for *imaginære tal*. De forblev mystiske, til danskeren Caspar Wessel (1745-1818), tyskeren Carl Friedrich Gauss (1777-1855) og franskmændene Jean-Robert Argand (1768-1822) omkring 1800 viste, hvordan de kunne ansues som punkter i en plan. Det var Gauss, som først benævnte disse nye tal *komplekse tal* (i betydningen sammensatte tal), som vi nu kalder dem, i et arbejde fra 1831.

Løsningen af kubiske ligninger

En løsningsalgoritme til kubiske ligninger

Betragt den generelle *kubiske ligning* (tredjegradsligning)

$$(1) \quad x^3 + ax^2 + bx + c = 0 .$$

Opgave 1:

Vis, at ligningen (1) ved substitutionen $x = y - \frac{1}{3}a$ kan bringes på formen

$$(2) \quad y^3 + py + q = 0 .$$

Bestem konstanterne p og q ud fra konstanterne a , b , c .

Skriv nu y på formen $y = u + v$, og indsæt i ligning (2).

Opgave 2:

Vis, at $y = u + v$ er en løsning til (2), hvis og kun hvis u og v tilfredsstiller ligningen

$$(3) \quad u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0 .$$

Opgave 3:

Vis, at $y = u + v$ er en løsning til (2), hvis u og v tilfredsstiller ligningerne

$$(4) \quad 3uv + p = 0 \quad \text{og} \quad u^3 + v^3 + q = 0 .$$

Opgave 4:

Vis, at $y = u + v$ er en løsning til $y^3 + py + q = 0$, hvis u og v tilfredsstiller ligningerne

$$(5) \quad u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \quad \text{og} \quad u^3 + v^3 = -q .$$

Opgave 5:

Vis, at u og v tilfredsstiller ligningerne i (5), hvis og kun hvis u^3 og v^3 er de to rødder (måske sammenfaldende) i andengradsligningen

$$(6) \quad z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0, \text{ som har rødderne}$$

$$z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} .$$

[Vink: Udnyt f.eks. faktoriseringen $z^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta = (z - \alpha)(z - \beta)$.]

Ved uddragning af kvadratrødder tillades her $\sqrt{-1}$ med den definerende egenskab

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

Det var i denne forbindelse, at de første idéer om de såkaldte *imaginære* (komplekse) tal opstod.

Af ovenstående følger, at $y = u + v$ er en løsning til $y^3 + py + q = 0$, hvis

$$(7) \quad u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{og} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Ved sluttelig at uddrage kubikrødder, idet $\sqrt[3]{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$, kan man nu bestemme en løsning på formen $y = u + v$ til ligningen $y^3 + py + q = 0$. De øvrige af de tre (måske sammenfaldende) løsninger bestemmes ved polynomiers division og formen for løsning af en andengradsligning.

Opgave 6:

Find en rod i hver af følgende ligninger ved brug af den skitserede procedure:

(i) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, (ii) $x^3 + 3x^2 + 9x + 9 = 0$, og (iii) $x^3 - 9x^2 + 21x - 5 = 0$.

Matematik inspireret af anvendelser

Mange matematiske landvindinger i renæssancen blev udviklet i forbindelse med anvendelser i meget forskellige områder, såsom brugen af perspektiv i kunst (Brunelleschi, Alberti, Leonardo da Vinci og Dürer), bidrag til teorien for musik samt geometri til navigation og kartografi (G. Mercator). Specielt stimulerede astronomi en interesse for plangeometri og sfærisk geometri, som det eksempelvis kan ses i værket *De Triangulis Omnimodis* fra 1464 (trykt i 1533) af Regiomontanus, latinsk pseudonym for Johannes Müller (1436-76).



De matematiske opdagelser under renæssancen omfattede bl.a. teorien for musik.

I det sekstende århundrede var regning med kugleramme og regning med romertal blevet afløst af udregninger på papir med de hindu-arabiske talsymboler. Endvidere genopdagede den belgiske matematiker Simon Stevin (1548-1620) i 1585 decimalbrøkerne, som de arabiske matematikere tidligere havde brugt dem, og han publicerede i 1610 en bog om emnet. Det krævede imidlertid stadig et stort arbejde at udføre multiplikationer af store tal, som det var nødvendigt i astronomi. Dette problem blev afhjulpet med opdagelsen af logaritmer i begyndelsen af det syttende århundrede, uafhængigt af John Napier (1550-1617) og Henry Briggs (1561-1631), som opfandt logaritmer med grundtallet 10, hvilket fik enorm betydning for astronomer og navigatører. Logaritmer var også nøglen til konstruktionen af matematiske instrumenter som regnestokken fra omkring 1630.

Matematik og den videnskabelige revolution

Fra omkring 1600 og fremad var europæiske videnskabsfolk overbevist om betydningen af matematik i studiet af naturen, og de enorme fremskridt i naturvidenskaberne i det sekstende og syttende århundrede var i stor udstrækning baseret på brugen af det matematiske sprog ved modellering af fænomener fra naturen. Denne udvikling var på mange måder stimuleret af diskussionen om planetsystemet, i særdeleshed vedrørende den *heliocentriske* teori, der blev genoptaget og beskrevet af Kopernikus (1473-1543) i hans bog *De revolutionibus orbium coelestium* (*Om himmelsfærernes kredsbevægelser*), som udkom umiddelbart før hans død. På Kopernikus' tid var det generelt accepteret, at planetsystemet kunne beskrives ved en mekanisk model med Jorden i centrum (den *geocentriske* model) udviklet af de gamle græske astronomer over adskillige århundreder og sammenfattet af Ptolemæus (ca.100-178 e.Kr.).

Med de senere forbedringer af arabiske astronomer gav det *ptolemæiske system*, som modellen kaldes, med stor præcision en beskrivelse af bevægelserne af de planeter, der var kendt på Kopernikus' tid. Systemet var imidlertid efterhånden blevet så kompliceret, at Kopernikus forkastede den geocentriske model for planetsystemet til fordel for den mere æstetisk tiltalende model med Solen i centrum (den *heliocentriske* model); en heliocentriske model for planetsystemet var allerede blevet foreslået som en hypotetisk mulighed af Aristarchus fra Samos (ca. 310-230 f.Kr.).

Tycho Brahe (1546-1601) var ikke stemt for det *kopernikanske system* og foreslog i stedet sin egen variant, hvor Månen og Solen roterer omkring Jorden, mens de andre planeter, som i det kopernikanske system, roterer omkring Solen. Tychos mange astronomiske observationer blev fortolket af hans samarbejdspartner Johannes Kepler (1571-1630), som opdagede den sande natur af planeternes bevægelser rundt om Solen og for stedse huskes for sine tre love for planetbevægelser formuleret i værkerne *Astronomia Nova* (Den nye astronomi) (1609) og *Harmonices Mundi* (Verdensharmonierne) (1619).

Brugen af matematik blev først fuldt udnyttet af de store naturvidenskabsmænd Galileo Galilei (1564-1642) og Isaac Newton (1642-1727) i forbindelse med formuleringen af de grundlæggende love for mekanikken. Galileo er måske bedst kendt for sine studier af legemer i fald. Det for eftertiden mest betydningsfulde af Galileos arbejder er hans bog



Diskussioner om astronomi og planetbevægelser optog mange videnskabsfolk, herunder matematikere, fra år 1500 og fremover. Med opfindelsen af teleskopet omkring år 1600 gik det hurtigt fremad med studiet af astronomiske fænomener.

*To nye videnskaber (1638) om mekanik, hvori han diskuterede lovene for uniform og accelereret bevægelse og forklarede, hvorfor banen for et projektil må være en parabel. Newtons største bedrift er utvivlsomt hans opdagelse af, at planetbevægelser og meget andet er bestemt af en universel lov, *den inverse kvadratlov*, for gravitation: Tiltrækningskraften mellem to legemer er proportional med produktet af deres masser og reciprok med kvadratet på deres indbyrdes afstand. I sin *Principia mathematica* (1687), måske det mest betydningsfulde videnskabelige værk til alle tider, brugte Newton denne lov til at forklare Keplers tre love om elliptisk planetbevægelse og til at forklare kometbaner, tidevandsbevægelser samt Jordens fladtrykning omkring polerne forårsaget af rotationen omkring jordaksen.*

Studiet af astronomiske fænomener blev stærkt forbedret med den hollandske opfindelse af teleskopet (kikkerten) omkring 1600. Konstruktionen af teleskopet blev forbedret af Galileo i 1609, som brugte sit teleskop, der var baseret på refraction (lysbrydning), til astronomiske observationer. Teleskoper baseret på refraction har imidlertid en alvorlig farvedefekt (kromatisk aberration), som bevirker, at forskellige farver i et billede ikke passer sammen. Problemet blev løst i 1668 med Newtons opfindelse af spejlteleskopet, hvor objektivet erstattes af et parabolisk hulspejl, som ikke har denne farvedefekt.

I forbindelse med det banebrydende arbejde om at forstå den mekaniske verden blev nye matematiske idéer og begrebet udviklet. De to vigtigste matematiske opdagelser af varig betydning var idéen om *analytisk geometri* (koordinatgeometri) og udviklingen af metoder til differentiation og integration, også kaldet *infinitesimalregning*.

Analytisk geometri

Et stort spring fremad i abstraktionen af matematiske tanker blev taget af Francois Viète (1540-1603) og Thomas Harriott (1560-1621), som vendte algebra fra kun at beskæftige sig med konkrete eksempler på ligninger til studiet af generelle typer af abstrakte ligninger med brug af forskellige symboler for kendte størrelser og ukendte størrelser. Det blev efterfulgt af et tilsvarende spring fremad i geometri ved arbejde af Descartes, som demonstrerede, hvordan generelle geometriske problemer kunne analyseres ved algebraiske metoder. Eksempelvis kan keglesnittene beskrives ved algebraiske ligninger af anden grad i to variable.

Det var et hovedpunkt for Descartes at opnå en sådan algebraisk beskrivelse af keglesnittene for at befri studiet af disse geometriske objekter fra de geometriske argumenter hos Euklid og Apollonius, som han kritiserede for at mangle en generel metode. Descartes opnåede sit mål ved at indføre koordinatsystemer og ved at skabe den nye gren *analytisk geometri* (koordinatgeometri) af geometrien, hvortil han lagde grunden i et appendiks *La Géométrie* til hans hovedværk *Essais Philosophiques*, publiceret i 1637. Metoderne, som blev udviklet til at håndtere spørgsmål i geometri af Euklid, Apollonius og deres efterfølgere frem til udviklingen af analytisk geometri, er nu kendt under navnet *syntetisk geometri*.

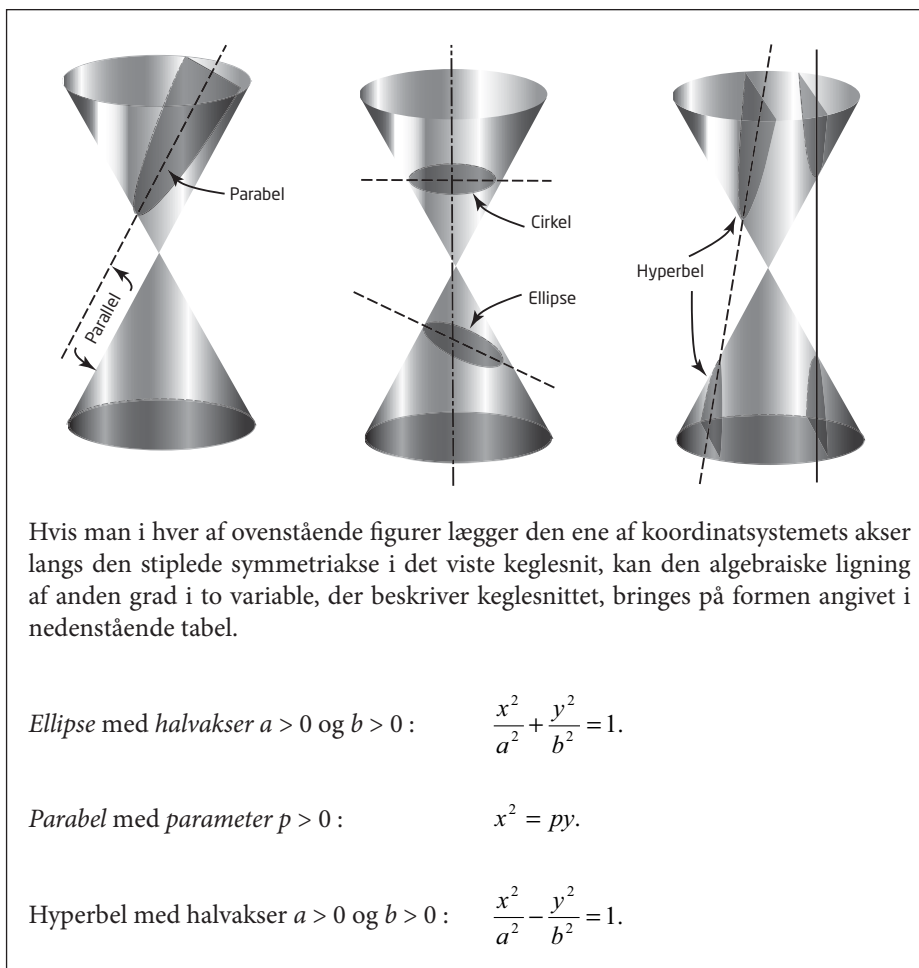
Den analytiske geometriske metoder er af fundamental betydning, og de indgår derfor i dag i pensum for de gymnasiale uddannelser verden over. Descartes viste selv styrken af den analytiske geometri ved at angive metoder til bestemmelse af normaler og tangenter til kurver.

Analytisk geometri

Keglesnittene

Den franske filosof og matematiker René Descartes (1596-1650) demonstrerede, hvordan generelle geometriske problemer kan analyseres ved algebraiske metoder gennem indførelse af koordinatsystemer. Descartes var ikke mindst optaget af at finde algebraiske ligninger for de tre keglesnit (ellipse, parabel og hyperbel), der var blevet indgående studeret ved geometriske metoder af de græske matematikere Euklid og Apollonius næsten 2.000 år tidligere. De algebraiske ligninger af anden grad i to variable, som Descartes fandt frem til, indgår i vore dage i matematikpensum på det gymnasiale niveau verden over.

Et *keglesnit* er, som navnet antyder, en plan kurve, der fremkommer ved at skære en kegleflade med et plant snit. Keglesnittets type er bestemt af skæringsplanens vinkel med omdrejningsaksen i keglefladen. Hvis skæringsvinklen er større end åbningsvinklen i keglefladen, får man en *ellipse*, er vinklerne ens, får man en *parabel*, og er skæringsvinklen mindre end åbningsvinklen i keglefladen, får man en *hyperbel*.



Regning med infinitesimaler ser dagens lys

I anden halvdel af det syttende århundrede så en ny matematisk disciplin dagens lys. Den blev delvis udviklet med henblik på at beregne størrelser knyttet til geometriske figurer og delvis, og måske af størst betydning for naturvidenskaberne, til at beskrive forandringer i størrelser. De nye metoder, der blev udviklet, danner grundlaget for den matematiske disciplin *infinitesimalregning*, som i vore dage er en obligatorisk del af læseplanerne i adskillige videregående uddannelser. I et videre perspektiv blev metoderne vigtige redskaber i en ny hovedgren af matematikken: *matematisk analyse*. Fremkomsten af en regning med infinitesimale størrelser er nært knyttet til arbejde af Isaac Newton i England og Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) i Tyskland.

Mange matematikere udviklede samtidigt metoder til at bestemme arealer, volumener og tyngdepunkter for flere geometriske figurer end dem, grækerne havde kunnet håndtere. En karakteristisk egenskab for alle disse metoder kan eksemplificeres ved metoden

brugt til at udregne et areal, nemlig ved at betragte arealet som en sum af uendeligt mange linjestykker (udelelige objekter) eller uendeligt mange uendeligt tynde rektangler (infinitesimale objekter). Disse idéer var i konflikt med det græske ideal om eksakt verifikation uden brug af uendeligheder. De fleste af de førende matematikere på den tid fandt det dog acceptabelt, at metoderne blev brugt til at eftervise nye resultater. Nogle få af dem så også sammenhængen mellem bestemmelse af tangenter og arealer, i særdeleshed den italienske matematiker Evangelista Torricelli (1608-47) og den engelske matematiker Isaac Barrow (1630-77). Sammenhængen blev imidlertid først fuldt afklaret i arbejde af Newton om 'fluxions og fluents' omkring 1666 og arbejde af Leibniz om 'differentialer, maksima og minima' omkring 1675 (publiceret 1684), hvor det blev påvist, at differentiation og integration er inverse processer.



I anden halvdel af det syttende århundrede så en ny matematisk disciplin dagens lys. Den blev delvis udviklet med henblik på at beregne størrelser knyttet til geometriske figurer og delvis, og måske af størst betydning for naturvidenskaberne, til at beskrive forandringer i størrelser.

Ved deres regning med infinitesimaler lagde Newton og Leibniz grunden til to metoder til beregninger, som i mange situationer tillod en automatisk og uniform behandling af spørgsmål om tangenter og arealer. Den gav også en metode til at løse en ny type af ligninger, nemlig *differentialligninger*, som forbinder funktioner og deres afledede. Differentialligninger blev først eksplicit formuleret i 1690'erne.

Matematisk analyse vokser frem

Igennem det attende århundrede blev infinitesimalregningen konsolideret og yderligere udbygget med nye discipliner som variationsregning, differentialligninger (både sædvanlige og partielle) og uendelige rækker. Med denne udvidelse af området voksede *matematisk analyse* frem som den tredje hovedgren af ren matematik ved siden af alge-

bra og geometri. Analyse blev udviklet i tæt samspil med anvendelser især inden for astro-nomi og mekanik. Hovedpersonerne i denne udvikling var brødrene Jakob Bernoulli (1654-1705) og Johann Bernoulli (1667-1748) samt Leonhard Euler (1707-83), alle født i Basel i Schweiz. Desuden de franske matematikere Jean Le Rond d'Alembert (1717-83), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) og Pierre-Simon Laplace (1749-1827).

Leonhard Euler fortjener i særlig grad omtale. Han underviste i St. Petersborg og Berlin og er sandsynligvis alle tiders mest produktive matematiker. Ved at bruge funktionsbe-grebet omformulerede han infinitesimalregningen, og han gav væsentlige bidrag til tal-teori, teorien for differentiaalligninger, geometrien af flader og adskillige andre matema-tiske emner. Det var Euler, som indførte notationen for mange af de grundlæggende matematiske enheder og symboler i infinitesimalregningen: grundtallet e for eksponen-tialfunktionen, den imaginære enhed i for de komplekse tal, tegnet Σ for summation og symbolet $f(x)$ for en funktion af x . Euler forbandt i ligningen $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ eksponen-tialfunktionen med de trigonometriske funktioner, og hans navn er knyttet til den berømte og smukke formel $e^{i\pi} + 1 = 0$, der forbinder matematikkens grundlæggende enheder. Han er også kendt for *Eulers polyedersætning*: Den alternerende sum af antal-lene af hjørner, kanter og sideflader på et konvekst polyeder er altid lig med 2. Eulers artikel om dette emne fra 1750 bliver anset som fødslen af den matematiske disciplin *topologi*.

Før 1700 blev ren matematik som regel dyrket som en fritidsinteresse. Efter dette tids-punkt fandt folk, som arbejdede med videregående matematik, næsten altid ansættelse i akademier og fra omkring 1800 ved universiteter. I det attende århundrede var akade-mierne i Paris, Berlin og St. Petersborg de mest prominente. Fra slutningen af det ty-vende århundrede blev et stigende antal af matematikere rekrutteret til forskningslabo-ratorier ved store selskaber.

Foruden bidragene til den matematiske analyse bød det attende århundrede på vigtige bidrag til sandsynlighedsteori af Jakob Bernoulli og Abraham de Moivre (1667-1754) og til talteori af Euler og Lagrange; sidstnævnte lagde også grunden til en teori om løs-ninger til ligninger.

Abstrakte matematiske strukturer viser deres gennemslagskraft

I det nittende århundrede gennemgik matematik en periode med vægt på systematisering og formalisering af matematiske idéer og begreber. Efter de foregående århundre-ders hurtige fremskridt i udviklingen af nye matematiske redskaber i forbindelse med anvendelser inden for naturvidenskaberne var tiden blevet moden til mere grundlæggende arbejde i matematik. Det blev tiden for matematisk abstraktion, og gen-nemslagskraften i abstrakt matematik viste sig snart.

Lagranges arbejde om algebraiske ligninger blev stærkt udvidet af den norske matema-tiker Niels Henrik Abel (1802-29). De matematiske idéer af Abel og den franske mate-matiker Evariste Galois (1811-32) markerer et vendepunkt i abstrakt matematik. Abel opfandt revolutionerende nye metoder i algebra til sit berømte bevis (i 1826) for, at poly-

nomiale ligninger af grad fem eller mere ikke kan løses ved roduddragning. Med stor snilde forbandt Galois systemet af løsninger til en polynomial ligning med et system af permutationer, som danner en såkaldt permutationsgruppe; den særlige gruppe, som er forbundet med mængden af løsninger til polynomiale ligninger, kendes nu som *Galois gruppen*. De dybtliggende resultater opnået af Abel og Galois blev velkendte i midten af det nittende århundrede, og de fik stor betydning for algebraens udvikling. Fra at være et studium af ligninger udviklede algebra sig med tiden til at være et studium af algebraiske strukturer som grupper, ringe og legemer.

Banebrydende nye opdagelser i geometrien

En tilsvarende udvikling kan ses i geometrien. Omkring 1800 var de fleste matematikere enige med den tyske filosof Immanuel Kant (1724-1804) i hans tro på, at rummets geometri *a priori* var den euklidiske geometri. Men i baggrunden lurede en stor overraskelse. Igennem århundreder havde mange matematikere fejlet i deres forsøg på at bevise, at Euklids femte postulat (parallelpostulatet) fulgte fra de fire andre postulater i Euklids *Elementer*, som omhandler de tilladelige regler for konstruktion med passer og lineal og entydighed af begrebet ret vinkel. Omkring 1830 kom gennembruddet, da russeren Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856), ungarenen János Bolyai (1802-60) og måske også den store tyske matematiker Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uafhængigt af hinanden, konstruerede nye geometrier, som ikke tilfredsstillede parallelpostulatet.



I 1827 beviste Gauss, at selv nok så lille en del af overfladen på en kugle ikke kan foldes ud i en euklidisk plan, uden at der opstår geometriske forvrængninger. Dette problem genfindes ved design af et Atlas. Jorden (og en globus) har kugleform, og derfor vil enten arealerne eller vinklerne i atlassets todimensionale kort være forvrængede.

Disse nye idéer i geometri blev yderligere udviklet i banebrydende arbejder af Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-66), ikke mindst i hans habilitationsskrift ved universitetet i Göttingen fra 1854, hvori han gav grundlaget for det, der nu kaldes *riemannsk geometri*. Mange af Riemanns idéer var generaliseringer til højere dimensioner af idéer hos Gauss fremlagt i hans grundlæggende pionerarbejde om differentialgeometri *Disquisitiones generales circa superficies curvas* fra 1827 om krumningen af flader. I dette arbejde beviste Gauss blandt meget andet, at selv nok så lille en del af overfladen på en kugle ikke kan foldes ud i en euklidisk plan, uden at der opstår geometriske forvrængninger.

Med fødslen af ikke-euklidiske geometrier opstod der et behov for at klassificere de forskellige typer af geometrier. Dette blev yderst hensigtsmæssigt gjort af Felix Klein (1849-1925) i 1872 i hans tiltrædelsesforelæsning ved universitetet i Erlangen, der nu kendes som *Erlanger programmet*, idet han gjorde brug af det nye begreb 'gruppe' i algebra, som da var i sin vorden. I 1899 lykkedes det for den tyske matematiker David Hilbert (1862-1943) at formulere et fuldstændigt sæt aksiomer for den euklidiske geometri i bogen *Grundlagen der Geometrie*.

Stringens i den matematiske analyse

I det nittende århundrede tilbød de førende universiteter i Europa undervisning i videregående matematik, herunder kurser i emner fra den matematiske analyse. Denne kobling imellem forskning og undervisning gav mange universitetslærere en følelse af, at det eksisterende grundlag for den matematiske analyse var utilstrækkeligt. I nogle berømte forelæsninger *Cours d'analyse* ved Collège de France i Paris i 1820'erne gav den franske matematiker Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) de formelle definitioner – i den form vi stadig bruger dem – på konvergens af følger og uendelige rækker og på kontinuitet af funktioner. Den tyske matematiker Karl Weierstrass (1815-97) bidrog yderligere til at bringe stringens ind i studiet af funktioner og matematisk analyse i forelæsninger ved universitetet i Berlin i 1870'erne i særdeleshed inden for variationsregning. Teorien for komplekse funktioner blev grundlagt i arbejder af Cauchy og Riemann i forbindelse med de såkaldte elliptiske funktioner indført af Abel og den tyske matematiker Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-51). Det nittende århundrede bliver undertiden omtalt som funktionsteoriens århundrede.

Udviklinger i den komplekse analyse blev stimuleret af overraskende forbindelser til talteori, ikke mindst ved studiet af tællefunktionen for primtal $\pi(n)$, som tæller antallet af primtal mindre end et givet positivt helt tal n . Kun femten år gammel fremsatte Gauss i 1792 den formodning, at $\pi(n)$ asymptotisk opfører sig som $n/\ln(n)$, hvor \ln betegner den naturlige logaritmefunktion. Efter arbejde af den franske matematiker Adrien-Marie Legendre (1752-1833) i 1808 og senere arbejde også af Gauss blev en måde at udtrykke den asymptotiske form på kendt som 'Primtalssætningen': Kvotienten mellem $\pi(n)$ og $n/\ln(n)$ nærmer sig 1, når n vokser ud over enhver øvre grænse. I en artikel fra 1859 foreslog Riemann, at et bevis måske kunne gennemføres ved studier af nulpunkterne for en kompleks funktion – den såkaldte *Riemanns zetafunktion*. Matematikernes stræben efter at fuldende Riemanns idéer blev en af de vigtigste inspirationskilder til udviklingen af den komplekse analyse frem til 1896, da det uafhængigt af hinanden lykkedes

for franskmændene Jacques Hadamard (1865-1963) og belgieren Charles De la Vallée Poussin (1866-1962) at bevise Primtalsætningen. Den berømte *Riemanns formodning* forbliver dog stadig uløst (2008).

Forsøgene på at finde en stringent aritmetisk basis for den matematiske analyse førte hurtigt til et udtalt behov for at finde et rigoristisk og komplet grundlag for det reelle talsystem. Definitive konstruktioner af de reelle tal ved rent logiske, aritmetiske konstruktioner (uden appel til intuition) blev først givet i sidste halvdel af det nittende århundrede, da de tyske matematikere Weierstrass, Richard Dedekind (1831-1916) og Georg Cantor (1845-1918) samt den franske matematiker Charles Méray (1835-1911) på næsten samme tidspunkt og uafhængigt af hinanden hver fremlagde en sådan konstruktion. En anden betydningsfuld udvikling i forbindelse med analyse var Cantors arbejde om teorien for uendelige mængder kort før 1900.

Yderligere udviklinger i det nittende århundrede

Nogle af udviklingerne i matematik i det nittende århundrede opstod i forbindelse med anvendelser. Mest bemærkelsesværdig er teorien for varmeledning i metaller udviklet af den franske matematiker Joseph Fourier (1768-1830) i en stor afhandling fra 1807 og nu kendt under navnet *Fourieranalyse*. Et andet højdepunkt er den fundamentale sætning i *vektoranalyse*, kendt som *Stokes' sætning*, formuleret af den engelske matematiker og fysiker George Gabriel Stokes (1819-1903) omkring 1850 i forbindelse med arbejde i hydrodynamik og elektrodynamik.



Fourieranalysen er teorien for varmeledning i metaller. Den blev udviklet af den franske matematiker Joseph Fourier i en stor afhandling fra 1807.

I sin bog *Théorie Analytique des Probabilités* introducerede Laplace i 1812 et antal nye idéer og matematiske teknikker i sandsynlighedsteori. Før Laplace var sandsynligheds-

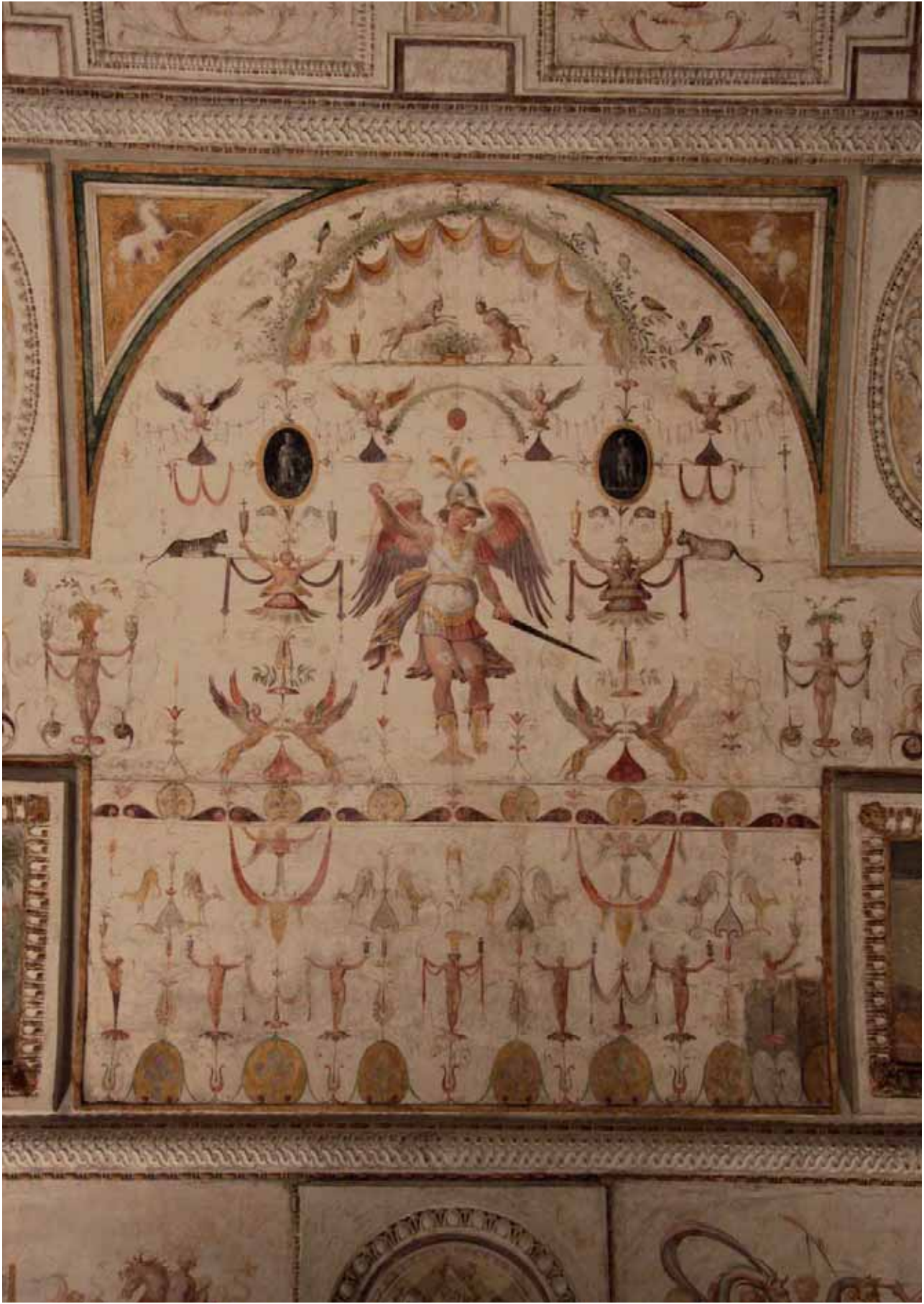
teori udelukkende beskæftiget med matematiske studier af tilfældigheder i spil, hvorimod Laplace anvendte idéer fra sandsynlighedsteori på mange videnskabelige og praktiske problemer. Forsikringsmatematik, teoretisk statistik og statistisk mekanik er eksempler på nogle af de vigtige anvendelsesområder for sandsynlighedsteori udviklet i det nittende århundrede.

Et særkende for studier af matematik i det nittende århundrede var den stigende vægtlægning på kvalitative egenskaber i forbindelse med matematiske strukturer. I teorien for differentiaalligninger blev sætninger om eksistens og entydighed af løsninger i stigende grad vigtige, og den kvalitative opførsel af løsninger blev studeret bl.a. af schweizeren Jacques Charles François Sturm (1803-55), franskmændene Joseph Liouville (1809-82) og ikke mindst af den franske matematiker og fysiker Henri Poincaré (1854-1912) i forbindelse med ikke-lineære differentiaalligninger. Sammen med tidligere resultater om kvalitative egenskaber ved geometriske objekter som Eulers polyedersætning etablerede Poincarés arbejde om den kvalitative teori for differentiaalligninger, herunder studier af mangfoldigheder af løsninger, omkring 1900 et fast udgangspunkt for *topologi* som en selvstændig matematisk disciplin.

Artiklens forfatter



Professor Vagn Lundsgaard



Når du i dag surfer på nettet, sker det af og til, at din browser opretter en "sikret forbindelse". Dette sker f.eks., når du køber noget online, eller når du logger på en hjemmeside, hvor du har en brugerkonto. I mange browsere kan du genkende en sikret forbindelse ved en lille hængelås, der vises i browserens bund. Når forbindelsen er sikret, så bliver al data krypteret. Dette betyder, at de er kodet, således at kun du og din kommunikationspartner (typisk webserveren) kan læse de beskeder, der sendes frem og tilbage.

Krypteringen er kun mulig, hvis du deler en hemmelighed med din partner, som ingen andre kender til. I kryptologien – videnskaben, som beskæftiger sig med hemmelige koder – kaldes en sådan hemmelighed en *nøgle*. Men hvordan kan det være, at du (eller din browser) deler en fælles hemmelighed med en webserver, som du aldrig før har været i kontakt med? Ens browser kunne måske have en nøgle til alle webservere? Det har den ikke, og det vil heller ikke være en god idé – hvis browserproducenten bygger nøglerne ind, så vil den jo dermed kende dem, og de vil derfor ikke længere være hemmelige. Her har vi åbenbart et problem: For at være i stand til at sende hinanden hemmelige beskeder skal man først udveksle en hemmelig nøgle, dvs. sende hinanden en hemmelig besked. Dette paradoks virker uløseligt, men i dette kapitel skal vi se på, hvordan problemet med *nøgleudveksling* løses.

Løsningsidéen

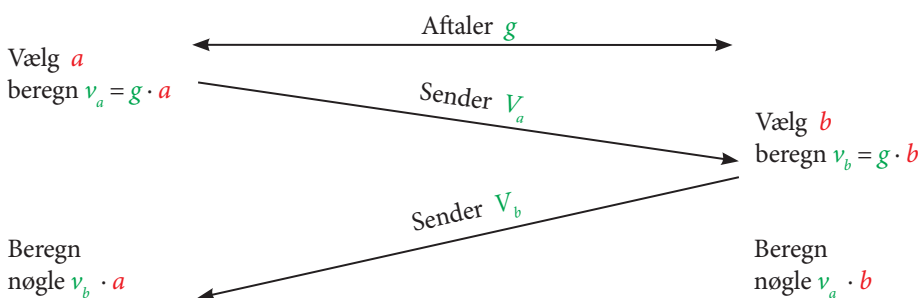
Kryptologi er næsten lige så gammel som håndskriften, og i årtusinder har man løst problemet med at kunne dele en fælles hemmelighed ved at skrive nøglen på et stykke papir (eller en papyrus eller en tavle) og aflevere koden personligt eller med et bud. Med internettet er det tydeligt, at nedskrevne nøgler ikke fungerer som løsning for vores problem – du modtager jo ikke et sådant stykke papir med din computer, og du har heller ikke tastet nøglen ind i din computer. Selvfølgelig kan computeren heller ikke få nøglen direkte fra nettet, fordi så kunne andre (som eksempelvis dit telefonselskab) jo også se nøglen. Så hvordan er nøglen kommet ind i din computer?

For mere end 30 år siden, da internettet ikke engang var opfundet endnu, stillede de to amerikanske kryptografer Whitfield Diffie og Martin Hellman sig det samme spørgsmål. De vidste, hvor store problemer regeringer, militær og virksomheder havde med nøgleudvekslingen, og de forudså endda en tid, hvor også privatpersoner ville få brug for kryptering.

Løsningen, som Diffie og Hellman fandt på, bygger på den iagttagelse, at det ikke er muligt at basere nøgleudvekslingen på kun en enkelt besked. Hvis senderen (som vi fremover kalder *Alice*) sender en nøglebesked til modtageren (som vi kalder *Bob*), og denne besked indeholder nogle nøgleinformationer, så kan indholdet kun være selve nøglen, og dermed vil en potentiel angriber (som vi kalder *Eva*) også kende den. Der skal altså mindst to beskeder til for at udveksle en nøgle på en sikker måde.

Eksempel på en nøgleudveksling

- Alice og Bob bliver enige om et offentligt heltal, som de kalder g . Eva må godt kende g , dvs. at de kan sende det åbent over nettet.
- Alice vælger et hemmeligt heltal, som hun kalder a . Hun beregner $v_a = g \cdot a$ og sender resultatet til Bob.
- Bob vælger også et hemmeligt heltal, som han kalder b . Han beregner $v_b = g \cdot b$ og sender resultatet til Alice.
- Nu kan Alice beregne den fælles nøgle som $v_a \cdot b$, og Bob kan beregne den som $v_b \cdot a$. Som det viser sig, er resultatet det samme, og Alice og Bob har dermed samme nøgle.



OPGAVE 1 og 2

Vis for $g=31$, $a=15$ og $b=22$, at resultatet er det samme for Alice og Bob.

Vis for vilkårlige værdier for g , a og b , at Alice og Bob får den samme nøgle.

Metoden er uden tvivl lidt forvirrende for Eva, men det er ikke det samme som at være sikker. Hvis Eva kender g , så kan hun beregne $a = v_a / g$. Hun kender også v_b , fordi Bob har sendt det over nettet, og kan dermed bestemme nøglen på samme måde som Bob, dvs. som $v_b \cdot a$. Med andre ord: Vores første idé var god, men ikke god nok.

OPGAVE 3



Du er Eva, og du ved, at $g = 17$, $v_a = 374$ og $v_b = 272$. Beregn den fælles nøgle, som Alice og Bob lige har udvekslet.

Modulo-regning

Vi forsøger nu at finde en bedre metode og bibeholder strukturen fra vores første eksempel. Formålet er dog at finde en bedre funktion end multiplikation – en funktion, som knytter to tal sammen på en sådan måde, at Eva ikke kan skille dem ad igen.

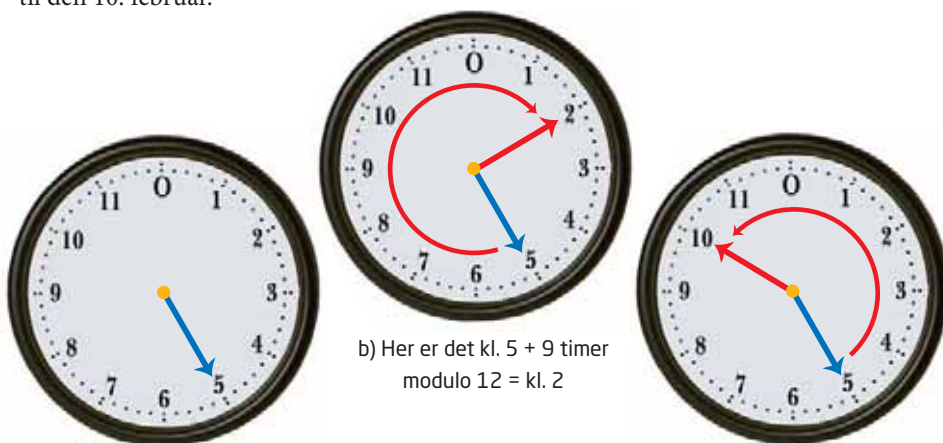
For at forstå løsningen, som Diffie og Hellman brugte, skal vi først forstå den såkaldte modulo-funktion. Hvis x og y er hele tal ($y \neq 0$) og vi skriver $x \bmod y$, så er resultatet divisionsresten, når x deles med y . For eksempel er $47 \bmod 15 = 2$, fordi $47 = 3 \cdot 15 + 2$.

OPGAVE 4



Beregn (a) $81 \bmod 2$, (b) $81 \bmod 17$, (c) $17 \bmod 81$, (d) $2 \bmod 2$.

Et kendt eksempel for modulo-regning i hverdagen er uret. Vores ure har kun tolv timer. Hvis klokken er 9 nu, og der går yderligere 6 timer, så viser uret klokken $(9+6) \bmod 12$, altså klokken 3. En lignende regel kan bruges, når man regner i måneder. Hvis det er den 20. januar i dag, og vi skal mødes om 3 uger, så er det jo egentlig den 41. januar. Men siden januar kun har 31 dage, regner vi $41 \bmod 31$ for at finde ud af, at det svarer til den 10. februar.



a) Her er det kl. 5

b) Her er det kl. 5 + 9 timer modulo 12 = kl. 2

c) Her er det kl. 5 - 7 timer modulo 12 = kl. 10

OPGAVE 5

Du har købt et computerspil, som må bruges frit i 100 dage efter installationen. Hvis du installerede spillet den 17. april - hvad er den sidste dag, inden du er nødt til at betale?

Når først man har vænnet sig til det, er modulo-regning ikke vanskelig at bruge. En vigtig regneregler er, at man ved brug af addition, subtraktion og multiplikation altid må reducere resultatet undervejs.

Eksempel: Selvfølgelig kan man beregne $(27 \cdot 74) \bmod 7$ ved først at danne $27 \cdot 74 = 1998$ og derefter reducere mod 7. Det kræver dog en lommeregner eller i det mindste gode regnefærdigheder. I stedet kan man nøjes med først at beregne $27 \bmod 7 = 6$ og $74 \bmod 7 = 4$, og derefter beregne $(6 \cdot 4) \bmod 7 = 24 \bmod 7 = 3$.

OPGAVE 6

Beregn (a) $(171 + 312) \bmod 5$, (b) $(17 \cdot 31) \bmod 5$, (c) $(33 + 80) \cdot 77 \bmod 3$. Husk at bruge regnereglen!

Modulær eksponentiering

Nu er vi parat til at udvikle den funktion, som Diffie og Hellman brugte til at løse nøgleudvekslingsproblemet. Den ligner en ganske almindelig eksponentiering, som vi kender den fra matematisk analyse, hvor vi skriver g^x , når g skal ganges x gange med sig selv. Men her bruger vi en modulo-operation til sidst, dvs. $g^x \bmod n$. Denne operation kalder vi modulær eksponentiering.

OPGAVE 7

Beregn (a) $2^5 \bmod 5$, (b) $5^3 \bmod 7$, (c) $5^{13} \bmod 4$. Husk regnereglen fra sidste afsnit!

Denne funktion har den sære egenskab, at den for visse valg af g og n "springer" gennem samtlige tal i området $1, \dots, n-1$. Hvis vi f.eks. tager $g = 3$ og $n = 7$, så får vi følgende tabel:

$3^0 \bmod 7$	$3^1 \bmod 7$	$3^2 \bmod 7$	$3^3 \bmod 7$	$3^4 \bmod 7$	$3^5 \bmod 7$
1	3	2	6	4	5

Læg mærke til, at f.eks. $3^4 \bmod 7$ kan beregnes som $3^3 \cdot 3 \bmod 7 = 6 \cdot 3 \bmod 7 = 4$; det er ikke nødvendigt først at regne hele 3^4 ud. Bemærk også, at følgen starter forfra igen efter 3^5 , dvs. $3^6 = 3^0 = 1$, $3^7 = 3^1 = 3$ osv.

OPGAVE 8



Udfyld nedenstående tabel for de andre værdier af g . For hvilke værdier af g gennemløber funktionen $g^x \bmod 7$ samtlige mulige værdier?

	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$
$1^x \bmod 7$						
$2^x \bmod 7$						
$3^x \bmod 7$	1	3	2	6	4	5
$4^x \bmod 7$						
$5^x \bmod 7$						
$6^x \bmod 7$						

Hvis funktionen $g^x \bmod n$ gennemløber samtlige værdier mellem 1 og $n-1$, så hedder g en *generator* for $\{1, \dots, n-1\}$. I talteorien (en af de mest teoretiske matematiske discipliner) findes der en del teori om, hvordan man finder en sådan generator, men det behøver vi ikke at interessere os for her. Vi kan nøjes med at vide, at hvis n er et *primtal*, så findes der altid mindst en generator for $\{1, \dots, n-1\}$.

Diffie-Hellman nøgleudveksling

Hvorfor er det nu vigtigt? Vi har lært, at hvis n er et primtal, og g er en generator for $\{1, \dots, n-1\}$, så gennemløber funktionen $g^x \bmod n$ samtlige værdier i $\{1, \dots, n-1\}$. Derudover kan vi se i tabellen fra opgave 8, at funktionen ”springer” på en meget uforudsigelig måde fra en værdi til den næste. Uden tabellen ville du ikke umiddelbart være i stand til at finde ud af, hvilket x du skal vælge for at få $3^x \bmod 7 = 6$. Vi siger derfor, at funktionen er vanskelig at inverttere. Og dette er nøjagtigt, hvad vi har brug for.

Vi ændrer nu vores protokoludkast, således at det bruger modulær eksponentiering i stedet for multiplikation:

- Alice og Bob bliver enige om et offentligt primtal n og en tilsvarende generator g . Angriberen må godt kende n og g , dvs. at de kan sende dem åbent over nettet.
- Alice vælger et hemmeligt heltal a . Hun beregner $v_a = g^a \bmod n$ og sender resultatet til Bob.
- Bob vælger også et hemmeligt heltal b . Han beregner $v_b = g^b \bmod n$ og sender resultatet til Alice.
- Nu kan Bob beregne den fælles nøgle som $(v_a)^b \bmod n$, og Alice kan beregne den som $(v_b)^a \bmod n$.

Det viser sig, at resultatet er det samme, og Alice og Bob deler dermed en nøgle.



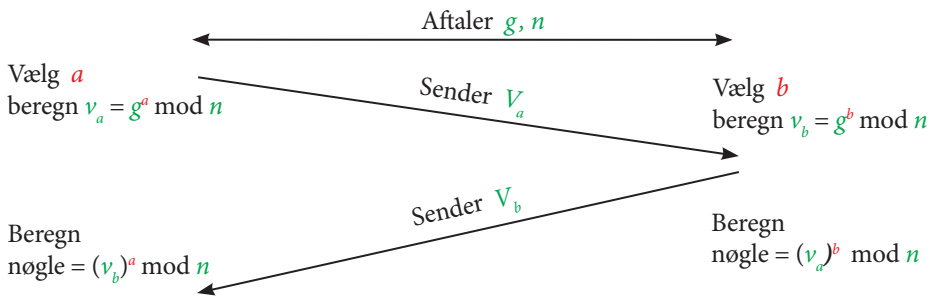
Alice



Eva



Bob



OPGAVE 9

Vis for vilkårlige værdier for g, n, a og b , at Alice og Bob får den samme nøgle.

Tip: Vis først samme resultat for almindelig eksponentiering, dvs. uden modulo-operationen.

I modsætning til vores første udkast kan Eva ikke beregne a ud fra v_a , og hun kan heller ikke beregne b ud fra v_b . Hvis tallene er store nok, så kender man ingen effektiv metode til at skille v_a eller v_b ad igen – og dette på trods af mere end 30 års intensiv forskning!

OPGAVE 10

Du er Eva, og du ved, at $g = 2, n = 53, v_a = 6$ og $v_b = 31$. Prøv at finde den fælles nøgle, som Alice og Bob lige har udvekslet. Brug computeren, hvis beregning ikke leder til noget.

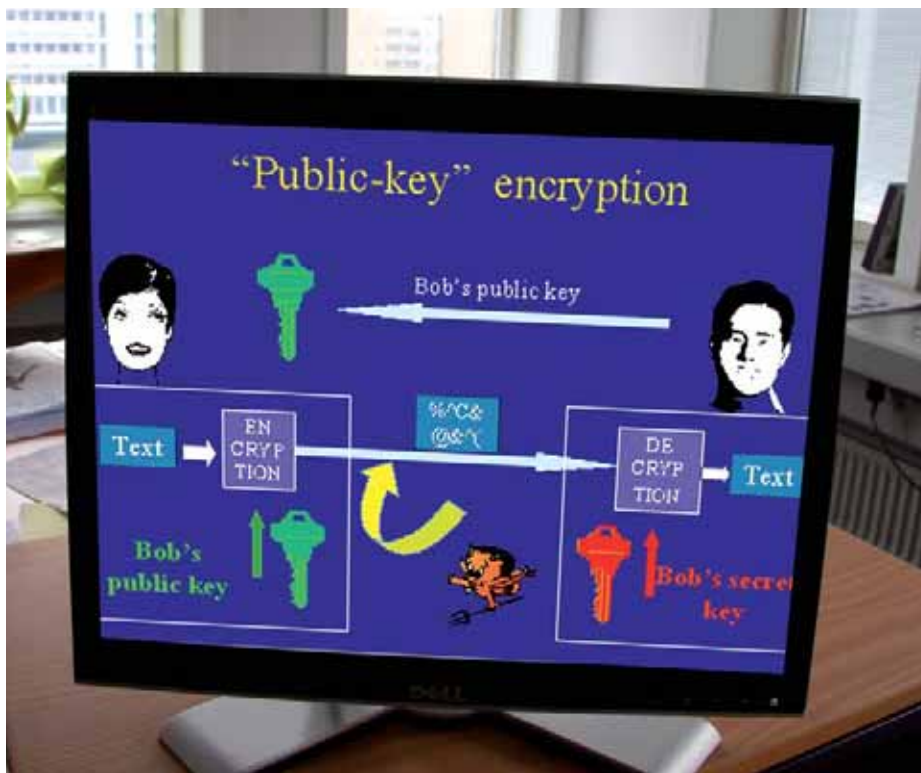
Ulempen ved metoden er dog, at tallene skal være temmelig store for at gøre løsningen sikker i praksis. Primtallet n (og dermed også nøglen) skal i dag have mindst 1024 bit (helst 2048), hvilket svarer til mellem 307 og 614 decimaler!

Opfindelsens betydning

Hvordan kan vi nu bruge denne matematiske metode i praksis? Husk at Alice kan være en hvilken som helst afsender, og Bob kan være en hvilken som helst modtager. At vi har givet dem navne betyder ikke, at de behøver være mennesker. Hvis vi husker vores eksempel fra kapitlets begyndelse, så kan Alice i virkeligheden være en webserver (f.eks. for en bank), og Bob kan være en internetbrugers computer (f.eks. din). Så når du kontakter en sikret hjemmeside – som kendes ved forkortelsen ”https” i adressen – bruger webserveren og din computer ovenstående løsning for at udveksle en nøgle. Derefter kan kommunikationen foregå uforstyrret.

Faktisk forudså Whitfield Diffie allerede i 1970’erne det, som senere blev kendt som ”Internet”. Hans motivation for at opfinde ovenstående løsning var at give almindelige mennesker adgang til beskyttet kommunikation, som hidtil kun var tilgængeligt for militær og efterretningstjenester. Denne idé blev taget imod med stor begejstring, og snart var der flere og flere forskere, som begyndte at interessere sig for emnet. Politiske ledere og myndighederne i mange lande var dog mindre begejstrede for udsprelsen af denne teknologi, som selvfølgelig også kan anvendes til at sløre ulovlige aktiviteter. Men udviklingen lod sig ikke bremse, og i dag er kryptologi et meget aktivt forskningsområde, der fortsat bidrager til at sikre kommunikation i hverdagen. Hver gang du bruger din mobiltelefon, betaler med dankort, logger på en sikret hjemmeside eller åbner en bildør med fjernstyring, er kryptologi i spil.

Diffies og Hellmans opfindelse havde også indvirkning på matematikken selv. Som nævnt stammer deres metode fra talteorien, et matematisk område som inden da blev anset for at være helt uden nogen form for praktisk nytte. Talteoretikerne var faktisk stolte af, at deres fag besad den rene teoris basale skønhed, der ikke kunne misbruges til verdslige formål. Nu viste det sig pludseligt, at dette ikke længere var tilfældet. Talteoretikernes videnskab blev anvendt i den virkelige verden, og det sidste fæstningsværk af den rene, ubesmittede matematik var nu faldet.



Artiklens forfattere



Adjunkt Erik Zenner



Professor Lars Knudsen



Matematik i medicinudvikling

Af Ph.d-studerende Anna Helga Jónsdóttir, Ph.d-studerende Søren Klim, Ph.d-studerende Stig Mortensen og Professor Henrik Madsen, DTU Informatik

Hovedpinen banker i hovedet, og det er umuligt at tænke på andet. Du åbner medicinskabet, griber glasset med hovedpinepiller, sluger to piller og et glas vand. I starten sker der ingenting, men lidt efter begynder hovedpinen langsomt at forsvinde, og til sidst er den helt væk. Du sender måske en anerkendende tanke til pilleproducenten, men de fleste betragter i dag adgangen til effektiv medicin som en selvfølge.

Udviklingen af ny medicin bliver drevet af fremskridt og ny indsigt på mange fronter, bl.a. øget forståelse af menneskets opbygning, ny bioteknologi og bedre produktionsudstyr. Når medicin skal udvikles fra et molekyle i forsøgslaboratoriet til rigtig medicin på apoteket, skal mange forskellige faktorer fastlægges. Hvor meget skal man give af stoffet? Hvordan skal det gives? Er stoffet farligt for børn, gravide eller gamle? Har stoffet bivirkninger? For at besvare disse spørgsmål udføres normalt omfattende forsøg på både dyr og mennesker. Disse forsøg sikrer, at medicinen ikke har uventede og utilsigtede virkninger, når den engang er at finde på apotekets hylder.

Sådanne forsøg er både meget bekostelige og tidskrævende, og derfor leder både myndigheder og medicinalfirmaer konstant efter metoder, der kan afkorte godkendelsesprocessen samtidig med, at analysen forbliver så sikker som mulig. Det primære mål er at sikre, at ingen skadelige stoffer slipper igennem nåleøjjet eller forsøgspersoner udsættes for unødige risici. Matematisk modellering er i denne sammenhæng et vigtigt værktøj, der kan bidrage til at få det optimale udbytte fra hvert enkelt forsøg. Matematisk modellering gør det muligt at omsætte viden fra forskellige videnskabelige grene til formler og tal, som kan analyseres og håndteres objektivt.

Forsøgsforløb effektiviseres med matematik

Ny medicin testes først på dyr – oftest mus, rotter, grise og aber. Disse forsøg bruges til at kortlægge, hvordan og hvor effektivt stoffet virker. Derefter udfører man forsøg på mennesker – i første omgang på raske frivillige mænd. De bliver doseret med meget små doser af stoffet for at undersøge, om stoffet er sikkert for mennesker. Hvis forsøgene på disse forsøgspersoner ikke afslører nogen uventede bivirkninger, kan dosis øges for at bestemme effekten af stoffet. Først når man efter flere forsøg har konstateret, at stoffet ikke er farligt, og at det virker på raske frivillige, begynder man at teste på rigtige patienter. I starten testes det på en lille patientgruppe, og til sidst udføres forsøg med mange patienter for at fastlægge, om den nye medicin rent faktisk virker bedre end produkter eller metoder, der allerede bruges.

Rækken af forsøg betyder, at tiden fra laboratorium til apotek i gennemsnit tager 8 år, men med matematisk modellering kan man effektivisere forsøgene og afkorte det samlede forløb. De videnskabelige discipliner, der handler om at bruge matematisk modellering af medicin, kaldes farmakokinetik og farmakodynamik. Begreberne bliver oftest anvendt på engelsk (pharmacokinetics/pharmacodynamics) og omtales ved forkortelsen PK/PD modellering. At der eksisterer to nært beslægtede discipliner skyldes, at samspillet mellem medicin og krop ønskes opdelt i ”hvad kroppen gør ved medicinen” og ”hvad medicinen gør ved kroppen”. Farmakokinetik beskriver, hvad kroppen gør ved medicinen, altså hvordan det bliver optaget, fordelt og til sidst igen udskilt fra kroppen. Farmakodynamik fokuserer på, hvad medicinen gør ved kroppen ved at beskrive, hvordan virkningen indtræder, hvornår og hvordan den relaterer sig til mængden af medicin i kroppen. I resten af dette kapitel vil fokus blive lagt på farmakokinetik modeller.

Medicinens vej gennem kroppen

Medicinens vej gennem kroppen opdeles normalt i 4 faser, der samlet beskriver, hvad kroppen gør ved medicinen.

- Absorption Medicinens optagelse i kroppen
- Distribution Fordelingen i kroppen
- Metabolisme Omdannelse til andre stoffer
- Elimination Udskillelse fra kroppen

Den første fase, absorption, kan variere meget afhængig af, hvilken måde medicinen bliver indført i kroppen. Den mest direkte metode er intravenøs (IV) dosering, hvor medicinen sprøjtes direkte ind i blodbanen. En nemmere indsprøjtning, hvor man ikke skal ramme så præcist, er i muskel (intramuskulær) eller fedtvæv (subcutan dosering). Her danner den doserede medicin en lille boble, som langsomt vil fordele sig ud i resten af vævet og derfra videre til blodet. Der findes også en lang række doseringsmetoder, som ikke involverer kanyler. Det kan f.eks. være som pille, næsespray, smeltetablet, stikpille eller blot en drikkelig væske. Fælles for disse er, at de på forskellig vis skal gennemtrænge kroppens naturlige barrierer, inden de når frem til blodbanen. Den mest anvendte metode er at spise en pille, hvilket kaldes oral dosering. Pillen opløses først i

væsken i mavesækken, og derefter trænger stoffet igennem mavesækkens eller tarmenes vægge ud i blodet.

Antabus mod indvoldsorm

Antabus, der giver kvalme ved indtagelse sammen med alkohol, blev fundet ved en tilfældighed i 1940'erne af Dr. Jacobsen og Dr. Hald. De arbejdede på at finde et middel mod indvoldsorm, og dengang var det ganske normalt at teste ny medicin på sig selv. Historien siger, at de to opdagere fik en cocktail til en fest efter selv at have afprøvet stoffet, og på den måde opdagede de effekten af at blande antabus og alkohol. I dag bruges antabus til afvænnning af alkoholmisbrug.

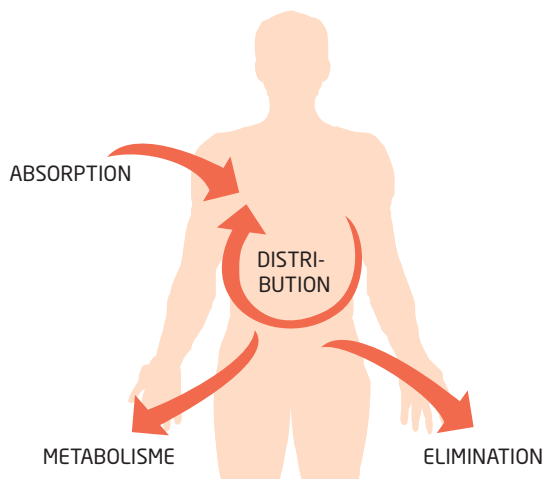
Valget af doseringsmetode afhænger af medicintypen og den pågældende situation. Fordelen ved IV-dosering er, at hele dosen kommer ud i blodet med det samme. På den måde kan man opnå hurtigt effekt, som kan være ønskeligt ved f.eks. smertelindring ved et færdselsuheld. Når medicin gives oralt, opnår man en langsommere optagelse i kroppen. Medicinen skal først trænge ind i blodet, men til gengæld kan de fleste sluge en pille uden hjælp.

Den næste fase, distribution, er stoffets fordeling i kroppens væsker og væv. Efter som blodet konstant pumper rundt og hurtigt fordeles i hele kroppen, er det normalt tilstrækkeligt at foretage målinger på blodet fra et enkelt sted for at bestemme koncentrationen af medicin. Målinger af koncentrationer foretages altså typisk i blodet, men også koncentrationen inde i en muskel eller i fedtvævet kan være interessant at måle. Det er distributionsfasen, der gennem blodet bringer medicinen ud til det sted i kroppen, hvor den skal udøve sin effekt. Der er stor forskel på tidsforløbet afhængig af, om stoffet skal virke et sted med stor blodgennemstrømning, eksempelvis hjertet, eller et sted uden direkte blodgennemstrømning, eksempelvis knoglemarven.

Metabolisme er en proces, hvor medicinen kemisk omdannes til et andet stof i kroppen. Leveren spiller her en stor rolle, da mange af de kemiske stoffer, som kroppen bruger i metabolismen, netop produceres i leveren. Det aktive stof i medicinen kan omdannes til et inaktivt stof, hvilket svarer til at fjerne medicinen, eller det kan ændres til et andet aktivt stof. Nogle medicintyper udnytter netop metabolismen til at danne en række andre stoffer, som så har en virkning. Eksempelvis skyldes morfins virkning hovedsageligt et af de stoffer, som dannes gennem metabolismen, og ikke morfin selv. Det betyder, at når man skal undersøge virkningen af et stof, er det ikke nok at holde styr på stoffet, men også nødvendigt at kende produkterne af de kemiske processer, som medicinen gennemgår.

Eliminationen beskriver, hvordan medicinen udskilles fra kroppen. Her er ikke tale om en kemisk omdannelse, men om en direkte fjernelse fra kroppen. Mange stoffer ender i urinen efter at være blevet filtreret ud af blodet i nyrerne. Kort sagt fungerer nyrerne som en si, hvor store molekyler bliver siet fra og små molekyler slipper igennem. Elimination

og metabolisme af medicinen kan foregå samtidig og flere steder i kroppen. Hvordan og hvor meget, som den enkelte proces fjerner, kan ikke altid bestemmes. Derfor bliver den matematiske model ofte en simplificeret udgave af virkeligheden.



Figur 1. Schematisk tegning af de 4 faser.

Grundlæggende begreber

I modelleringen af medicin er det første spørgsmål ofte ”Hvad bliver koncentrationen af stoffet, hvis vi giver denne dosis?” For at besvare dette spørgsmål skal man først forstå, hvad koncentration er.

Koncentration er defineret som *mængde per volumen* og er interessant, da virkning og bivirkning af medicin ofte er forbundet til koncentrationen. Det er også kun koncentrationen, det er muligt at måle, når der tages en blodprøve. Koncentrationen (engelsk: Concentration) udregnes som

$$C = \frac{A}{V} \quad (1)$$

hvor A er stofmængden (engelsk: *Amount*) og V er distributionsvolumenen. Mængden af stoffet er enten målt i vægt (mg) eller direkte i antal molekyler (mol). Distributionsvolumenen repræsenterer den volumen, som stoffet skal fordele sig jævnt i for at give den observerede koncentration i blodet. Hvis stoffet udelukkende holder sig i blodet, er distributionsvolumenen det samme som blodvolumenen, men ofte ses det, at distributionsvolumenen er større end blodvolumenen. Det kan skyldes, at medicinen har passeret igennem blodåreneres vægge og ud i andre dele af kroppen, hvilket bevirker, at den målte medicinkoncentrationen i blodet bliver lavere. Den samlede mængde medicin er stadig uændret, men der er blot en mindre mængde tilgængeligt i blodet. For at kunne opbygge en matematisk model, der skal kunne forudsige koncentrationen af et stof, er det nødvendigt at vide, hvor stort distributionsvolumenen er.

Eksempel 1:

1000 mg af et stof gives ved en IV-indsprøjtning, så mængden af medicin i blodet kendes præcist. Derefter bliver koncentrationen målt til 200 mg/liter. Distributionsvolumenen kan nu udregnes til

$$V = \frac{A}{C} = \frac{1000 \text{ mg}}{200 \text{ mg/liter}} = 5 \text{ liter}$$

Dette indikerer, at stoffet fordeler sig i blodet, eftersom blodets volumen er ca. 5 liter.

Et andet stof, stadigvæk 1000 mg, gives igen ved IV-indsprøjtning. Denne gang bliver koncentrationen kun på 70 mg/liter.

$$V = \frac{A}{C} = \frac{1000 \text{ mg}}{70 \text{ mg/liter}} \approx 14 \text{ liter}$$

Så er det ikke længere kun blodet, som stoffet fordeles i. Stoffet er altså i stand til at passere igennem blodbanernes vægge og ud i resten af kroppen.

En normal voksen persons krop på 70 kg indeholder ca. 42 liter vand. Denne mængde vand opdeles i afhængig af om den findes inden i eller uden for cellerne.

Inden i cellerne (Intracellulær): 28 liter

Uden for cellerne (Ekstracellulær): 14 liter

{	11 liter mellem cellerne i organerne 3 liter plasma i blodet
---	---

Blod består af plasma og forskellige typer celler, hvoraf de røde blodceller udgør langt den største del af volumenen.

Matematisk vinkel

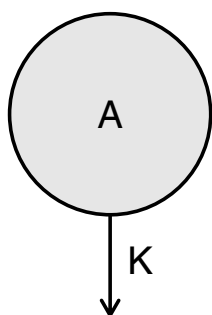
Det er kort blevet gennemgået, hvordan medicin kommer ind i kroppen, fordeler sig og bliver fjernet igen. Forløbet blev beskrevet gennem generelle farmaceutiske begreber, som nu skal omsættes til matematiske modeller. Målet med de matematiske modeller er bl.a. at kunne beskrive, hvordan koncentrationen af medicin vil udvikle sig over tid ved at tage udgangspunkt i den teori, der lige er blevet gennemgået.

For at kunne opbygge matematiske modeller for medicinens rejse gennem kroppen opdeles kroppen i enkeltdele. Disse enkeltdele skal være dele af kroppen, hvor medicinen opfører sig ens. Et eksempel på en sådan enkeltdel kunne være blodet. Et andet eksempel kunne være medicinboblen, som opstår efter en indsprøjtning. Disse enkeltdele betegnes med det engelske ord *compartment*, som betyder kammer. Når en model

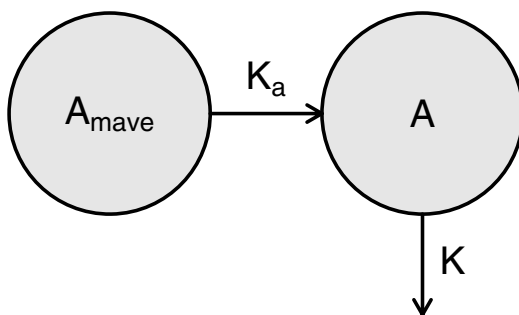
benytter denne opdeling af kroppen, betegnes den som en compartment model. Lige såvel som enkeltdele i kroppen kan være forbundne, så kan modellens compartments også forbindes med hinanden. Modellen består således både af compartments og deres forbindelser.

Det compartment i den matematiske model, som repræsenterer den enkelt del, hvor målingerne tages, er af særlig interesse og benævnes det centrale compartment. Mængden af medicin i det centrale compartment bliver modellens bud på koncentrationen, når der tages højde for distributionsvolumenen.

De mest grundlæggende modeller kaldes et-compartment systemer og indeholder kun det centrale compartment. Når man grafisk vil vise en compartment model, vises compartments som cirkler og forbindelserne som pile. I figur 2 kan man se en et-compartment model. En et-compartment model bruges ofte til at beskrive IV-indsprøjtning. Det ene compartment er tilstrækkeligt til at beskrive stoffet, hvis doseringen og målingen af koncentration foregår i samme compartment. Desuden skal det gælde, at medicinen ikke fordeler sig i andre dele af kroppen. Når medicinen tages oralt, er det nødvendigt at udvide modellen. Her skal modellen desuden indeholde et mave-compartment, som repræsenterer den medicin, som stadig befinder sig i mavesækken. En model af denne type kan ses i figur 3. Endnu mere komplicerede modeller kan indeholde mange compartments, som repræsenterer organer eller væv, som har andre egenskaber. For mange typer af medicin kan systemerne vist i figur 2 og 3 fint beskrive koncentrationsforløbet. Derfor vil disse modeller danne udgangspunkt for den matematiske beskrivelse af teorien. I figurerne er størrelserne af forbindelser benævnt med konstanterne K_a og K . Disse konstanter vil blive gennemgået senere.



Figur 2. Et-compartment model.



Figur 3. To-compartment model.

En simpel måde man kan antage, at medicin fjernes fra blodet, er ved en konstant hastighed. Hvis en dosis på 1000 mg bliver givet ved IV-indsprøjtning, og kroppen kan fjerne 100 mg pr. time, vil det være relativt nemt at forudsige mængden af medicin i kroppen, og efter 10 timer vil hele dosen være væk.

Desværre er det sjældent tilfældet, at medicin fjernes som en konstant mængde pr. tid. Den fjernede mængde er hyppigt afhængig af den totale mængde medicin. Det kan sammenlignes med vand, som løber ud af et hul i en spand. Hvis der er meget vand i spanden, vil det presse mere vand ud af hullet og gøre strålen kraftigere. Efterhånden som vandstanden falder, vil strålen blive mindre kraftig.

Når eliminationen er direkte afhængig af mængden af medicin, kaldes eliminationen 1. ordens. Den konstante elimination kaldes 0. ordens.

Matematisk beskrivelse af compartment systemer

Tidligere blev det omtalt, hvordan eliminationen af medicin er afhængig af den tilbageværende mængde af medicin. Den type modeller beskrives ofte med differentiallyigninger, som kan beskrive sammenhængen mellem stofmængden A i blodet og ændringen pr. tid dA/dt . Herunder er vist ligningerne for både 0. og 1. ordens elimination, men det er kun den sidstnævnte, som vi vil arbejde videre med.

$$0. \text{ ordens} \quad \frac{dA}{dt} = -K \cdot A^0 = -K \quad (2)$$

$$1. \text{ ordens} \quad \frac{dA}{dt} = -K \cdot A^1 = -K \cdot A \quad (3)$$

I ligningerne repræsenterer K eliminationsprocessen. Parameteren K er altid positiv, og dens størrelse bestemmer hastigheden for eliminationen. Hvis man skal genbruge eksemplet med en spand fra før, så kan K betragtes som arealet af hullet. Når K er positiv og mængden af medicin er positiv, kan man se, at ændringen af medicin altid vil være negativ ($-K \cdot A$). Løsningen til ligning (3) er en funktion, som beskriver stofmængden i blodet til ethvert tidspunkt t .

$$A(t) = A_0 \exp(-K \cdot t) \quad (4)$$

I ligningen er A_0 stofmængden til tiden $t=0$, hvilket for IV-dosering er lig dosis-mængden.

Ved oral dosering skal modellen også indeholde et mave-compartment som vist i figur 3. Overførslen af medicin fra mavesækken til blodbanen kan beskrives på samme måde som eliminationen i et-compartment modellen. Det kan skrives som i ligning (3), men nu gældende for mængden af medicin i maven:

$$\frac{dA^{MAVE}}{dt} = -K_a \cdot A^{MAVE} \quad (5)$$

hvor A^{mave} er mængden af medicin i maven og K_a bestemmer hastigheden for absorptionen fra maven. Det antages, at K_a er større end K , dvs. at medicinen kommer hurtigere ud i blodet, end eliminationen kan nå at fjerne den. Den omvendte situation kan ske, men vil ikke blive behandlet her i kapitlet.

Når medicin bliver doseret uden for selve blodbanen, er der en risiko for, at en brøkdél vil gå tabt. Mulige forklaringer er, at medicinen nedbrydes i mavesyren eller omdannes via kemiske processer. Den brøkdél, der reelt bliver optaget, kaldes et stofs biotilgængelighed og betegnes med bogstavet F . Biotilgængeligheden er et tal mellem 0 og 1, hvor 1 betyder, at 100 % af dosen blev optaget. Ved oral dosering er mængden af medicin i blodet afhængig af både tilførslen og fjernelsen. Dvs. man kan opskrive den samlede æn-

dring af medicin i blodet som den mængde, der tilføres fra maven minus den mængde, der elimineres. Det giver ligningen nedenfor

$$\frac{dA}{dt} = \overbrace{F \cdot K_a \cdot A}^{\text{Fra maven}} - \overbrace{K \cdot A}^{\text{Elimination}} \quad (6)$$

Denne ligning (6) sammen med ligning (5) udgør det system, som skal løses for at finde en funktion for medicinmængden $A(t)$. Løsningen er givet herunder og er ikke gennemgået nærmere her.

$$A(t) = \frac{K_a F A_0}{(K_a - K)} (\exp(-K \cdot t) - \exp(-K_a \cdot t)) \quad (7)$$

Med ligning (4) og (7) kan man nu bestemme mængden af stof i blodet til ethvert tidspunkt for henholdsvis IV og oral dosering. Normalt er man mest interesseret i at bestemme koncentrationen, og ifølge ligning (1) fås denne direkte ved at dividere mængden med distributionsvolumenen. Det giver for IV-dosering

$$C(t) = \frac{A(t)}{V} = \frac{A_0}{V} \cdot \exp(-K \cdot t) \quad (8)$$

og for oral dosering

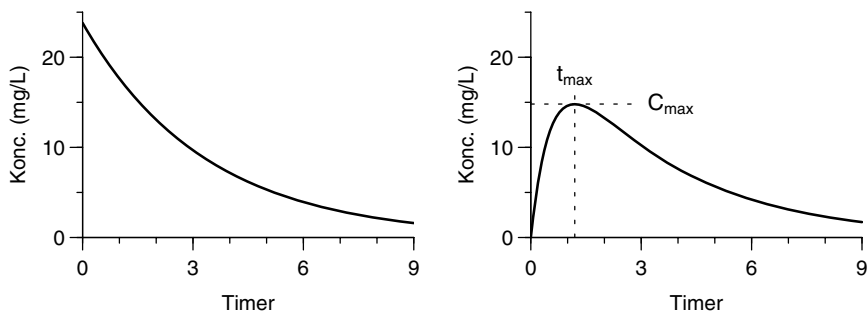
$$C(t) = \frac{A(t)}{V} = \frac{K_a F A_0}{V(K_a - K)} (\exp(-K \cdot t) - \exp(-K_a \cdot t)) \quad (9)$$

Indtagelse af en hovedpinepille

I starten af kapitlet blev situationen med en hovedpinepille beskrevet. Et meget almindeligt stof mod hovedpine er stoffet paracetamol, der i Danmark f.eks. sælges under navnet Panodil. Paracetamol hæmmer de stoffer, som nerverne bruger til at sende beskeder om smerte. Paracetamol er ikke helt ufarligt, da det kan give varige skader på leveren ved for høje doser. Anbefalingen er at tage doser af 1000 mg højst 3-4 gange dagligt og aldrig mere end 4 gram pr. døgn.

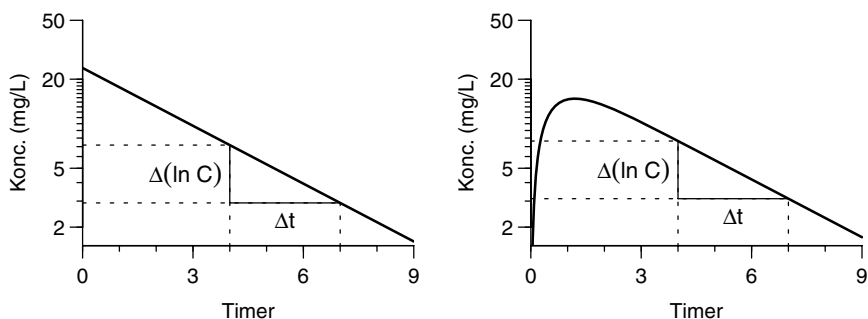
Paracetamol er blevet undersøgt i en række forsøg, og det kan vises, at paracetamol tilnærmelsesvist følger en model med 1. ordens eliminationen fra blodet, og ligeledes at det optages fra maven med en 1. ordens absorption. Paracetamol kan derfor modelleres med systemerne vist i figur 2 og 3 for IV og oral dosering, da det fordeler sig hurtigt og jævnt i hele kroppens væske. Forsøgene har vist, at paracetamols eliminationskonstant er $K=0,3 \text{ timer}^{-1}$, og distributionsvolumenen for en gennemsnitsperson er 42 liter. Absorptionen styres af en absorptionskonstant på $K_a = 1,80 \text{ timer}^{-1}$. Biotilgængeligheden, altså den andel som reelt kommer ud i blodet, af paracetamol er $F = 0,89$. Bemærk, at antagelsen om, at $K_a > K$, er opfyldt. Det betyder, at paracetamol optages hurtigere i blodet, end det fjernes.

Ud fra de tal, der lige er oplyst for paracetamol, er det muligt at beregne koncentrationen som funktion af tiden på baggrund af ligning (8) og (9). Grafen af koncentration over tid kaldes en koncentrationsprofil, og i figur 4 er de vist for både IV og oral dosering.



Figur 4. Koncentrationsprofiler ved først IV og dernæst oral dosering af 1000 mg paracetamol.

Koncentrationsprofilerne kan også med fordel vises med naturlig logaritmisk skala på y-aksen. Det gør det muligt at aflæse $-K$ direkte som hældningen på linjen ved IV-dosering. Ved oral dosering findes $-K$ som hældningen på den sidste del af kurven, der minder mest om en ret linje. Grunden til at man kan aflæse $-K$ på den sidste del af linjen skyldes, at absorptionen er helt færdig på det tidspunkt, så der kun er medicin tilbage i blodet.



Figur 5. Koncentrationsprofiler på log-skala ved IV og oral dosering.

Hældning på linjen, der er lig med eliminationskonstanten med modsat fortegn, er givet ved

$$-K = \frac{\Delta(\ln C)}{\Delta t} \quad (10)$$

I figur 5 ses, hvordan $-K$ aflæses fra de to grafer. Det er også muligt at aflæse K_a , men dette kræver en mere besværlig procedure, som ikke vil blive gennemgået her.

Eksempel 2:

Eliminationskonstanten kan beregnes fra koncentrationsprofilen for oral dosering vist i figur 5 ved aflæsning af følgende værdier

$$K = -\frac{\Delta(\ln C)}{\Delta t} \approx -\frac{\ln 3 - \ln 7,5}{7 \text{ timer} - 4 \text{ timer}} \approx 0,305 \text{ timer}^{-1}$$

hvilket er meget tæt på den rigtige værdi for K .

Bestemmelse af maksimumkoncentration

I mange tilfælde er det vigtigt at kende den maksimale koncentration, et stof kan opnå ved en given dosis, samt hvornår denne koncentration nås. For IV-dosering vil den maksimale koncentration opnås, lige efter medicinen er givet, og den beregnes som

$$C_{\max}^{IV} = \frac{A_0}{V} \quad (11)$$

Eksempel 3:

Den maksimale koncentration ved IV-dosering af 1000 mg paracetamol bliver

$$C_{\max}^{IV} = \frac{A_0}{V} = \frac{1000 \text{ mg}}{42 \text{ liter}} = 23,8 \text{ mg/liter}$$

For oral dosering vil koncentrationen først toppe efter et stykke tid på grund af absorptionen. Tidspunktet for den maksimale koncentration (t_{\max}) kan findes ved at differentiere ligning (9) med hensyn til t og sætte udtrykket lig 0. Ved at differentiere (9) får man

$$\frac{dC}{dt} = \frac{K_a^2 FA_0}{V(K_a - K)} \exp(-K_a \cdot t) - \frac{KK_a FA_0}{V(K_a - K)} \exp(-K \cdot t) \quad (12)$$

For at finde t_{\max} sættes ligning (12) lig 0 og løses for $t=t_{\max}$

$$\frac{K_a^2 FA_0}{V(K_a - K)} \exp(-K_a \cdot t_{\max}) = \frac{KK_a FA_0}{V(K_a - K)} \exp(-K \cdot t_{\max}) \quad (13)$$

Brøken $\frac{K_a FA_0}{V(K_a - K)}$ går ud på begge sider, og tilbage høves

$$\begin{aligned} K_a \exp(-K_a \cdot t_{\max}) &= K \exp(-K \cdot t_{\max}) \\ \Downarrow \\ \frac{K_a}{K} &= \frac{\exp(-K \cdot t_{\max})}{\exp(-K_a \cdot t_{\max})} = \exp(-K \cdot t_{\max} - K_a \cdot t_{\max}) \end{aligned} \quad (14)$$

Ved at tage den naturlige logaritme på begge sider fås

$$\ln\left(\frac{K_a}{K}\right) = -K \cdot t_{\max} - K_a \cdot t_{\max} \quad (15)$$

som giver

$$t_{\max} = \frac{1}{K_a - K} \ln\left(\frac{K_a}{K}\right) \quad (16)$$

Når tidspunktet for den maksimale koncentration kendes, kan selve den maksimale koncentration findes ved at indsætte t_{\max} i udtrykket for $C(t)$, hvilket kan reduceres til

$$C_{\max}^{\text{oral}} = \frac{FA_0}{V} \exp(-K \cdot t_{\max}) \quad (17)$$

Eksempel 4:

Tiden til den maksimale koncentration ved oral indtagelse af 1000 mg paracetamol kan bestemmes som

$$\begin{aligned} t_{\max} &= \frac{1}{K_a - K} \ln\left(\frac{K_a}{K}\right) \\ &= \frac{1}{1,80 \text{ timer}^{-1} - 0,3 \text{ timer}^{-1}} \ln\left(\frac{1,80 \text{ timer}^{-1}}{0,3 \text{ timer}^{-1}}\right) \\ &= 1,19 \text{ timer} \end{aligned}$$

og dermed fås den maksimale koncentration til

$$\begin{aligned} C_{\max}^{\text{oral}} &= \frac{FA_0}{V} \exp(-Kt_{\max}) \\ &= \frac{0,89 \cdot 1000 \text{ mg}}{42 \text{ L}} \exp(-0,3 \cdot 1,19) = 14,83 \text{ mg/L} \end{aligned}$$

OPGAVER

1) Vis ved at differentiere, at ligning (4) er løsning til differentialligningen i ligning (3).

2) Prøv selv at opstille udtrykket i ligning (17).

Tip: Indsæt ligning (16) i ligningen for $C(t_{\max})$, og brug ligning (14) til at forkorte.



Flere hovedpinepræparater medfører varige leverskader ved indtagelse af for store koncentrationer. Med matematiske modeller kan man bl.a. beskrive, hvordan koncentrationen af medicin i kroppen udvikler sig over tid.

Halveringstid

En vigtig egenskab, når der tales om medicin, er dets halveringstid. Halveringstiden ($t_{1/2}$) er defineret som den tid, der går, inden kroppen har elimineret halvdelen af stoffet i blodet. Det er lettest at bestemme halveringstiden, når der ikke bliver tilført ny medicin til blodet, så det gøres lettest ud fra et IV-forsøg.

Eksempel 5:

Hvis man starter med 100 % og venter 4 halveringstider, vil der være $100 \cdot (1/2)^4 = 6,25$ % tilbage i blodet.

Vi kan bruge ligning (4) til at finde halveringstiden for en IV-dosering. For $t=t_{1/2}$ fås

$$A(t_{1/2}) = A_0 \exp(-K \cdot t_{1/2}) \quad (18)$$

Og da halvdelen af medicindosen er tilbage efter en halveringstid, gælder det, at

$$\frac{1}{2} A_0 = A_0 \exp(-K \cdot t_{1/2}) \quad (19)$$

Udtrykket forkortes, og den naturlige logaritme tages på begge sider, hvilket giver

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{K} \quad (20)$$

I praksis bruger man også ligning (20) om halveringstiden ved oral dosering, da eliminationen fra blodet styres af det samme system. Reelt skal man dog være opmærksom på, at det først gælder, efter at absorptionen er ophørt.

Eksempel 6:

Halveringstiden for paracetamol kan beregnes som

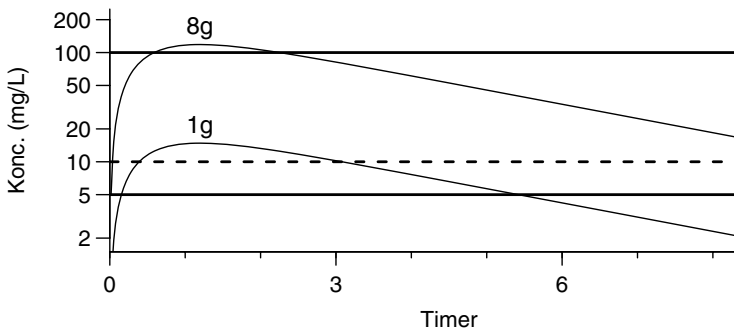
$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{K} = \frac{\ln 2}{0,3 \text{ timer}^{-1}} = 2,31 \text{ timer} = 2 \text{ timer og } 19 \text{ min}$$

Behandlingsvindue

Når man åbner en pakke hovedpinepiller med paracetamol og læser vejledningen som omtalt tidligere, vil der typisk stå, at en voksen må spise "1g paracetamol 3-4 gange dagligt, dog max 4g dagligt". Ved at sluge pillerne på tidspunkter fordelt over hele dagen opnår man, at der hele tiden er et vist niveau af paracetamol til stede i kroppen. En potentiel farlig situation kan opstå, hvis man tager alle pillerne på samme tid. Man ved, at paracetamol kan medføre alvorlige og varige skader på leveren, hvis koncentrationen bliver for høj. Allerede omkring en koncentration på 100 mg/liter er der øget risiko for

leverskade. På den anden side er det også klart, at hvis koncentrationen bliver for lav, er der ingen smertestillende virkning. For paracetamol kan man gå ud fra, at feberreduktion opnås ved koncentrationer over 5 mg/L, mens smertestillende virkning kan først opnås ved en koncentration på omkring 10 mg/L. Man betegner disse grænser som medicinens behandlingsvindue, dvs. de grænser man skal holde sig inden for for at sikre en effekt, men samtidig undgå bivirkninger.

Ved hjælp af formlen for maksimumkoncentrationen ved oral dosering i ligning (17) er det muligt at bestemme den maksimale koncentration, der opnås efter indtagelse af flere piller med paracetamol samtidigt. I figur 6 er koncentrationsprofilen vist på naturlig logaritmisk skala for doserne af 1g og 8g, der svarer til henholdsvis den anbefalede dosis og dobbelt maksimale daglig dosis indtaget på en gang. Fra figuren ses, at patienter først ved indtagelse af dobbelt daglig dosis på en gang kommer i farezonen for leverskader. Det kan også ses ud fra figuren, at grænserne for feberreduktion (5 mg/L) og smertestillende virkning (10 mg/L) er nået ved indtagelse af en enkelt pille på 1 gram, og at koncentrationen falder under grænserne igen efter henholdsvis 5½ og 3 timer.



Figur 6. Koncentrationsprofiler for paracetamol i forhold til behandlingsvinduet.

Ved normal brug af hovedpinepiller kommer man ikke i nærheden af grænsen for øget risiko for leverskade, men for patienter, som har leverskade, er situationen anderledes. Deres nedsatte leverfunktion gør, at paracetamol elimineres langsommere fra kroppen. Da patienterne allerede har leverskade, skal de nødvendigvis udsættes for yderligere skader på leveren, så ved dosering af paracetamol til leverpatienter skal man være meget varsom.

OPGAVE

Hvad bliver maksimumkoncentration af paracetamol for en leverpatient? Antag, at leverfunktionen er stærkt nedsat, så halveringstiden er dobbelt så lang som hos et raskt menneske. Udregn først den nye eliminationskonstant, og brug så den til at bestemme den maksimale koncentration.



Multipel dosering

I mange situationer er det ikke nok for en patient at have virkning af medicin i det tidsrum, en enkelt pille eller en enkelt IV-dosis er aktiv i kroppen. I nogle tilfælde kan man forlænge virkningen ved at give en højere dosis første gang, men da meget høje koncentrationer kan give bivirkninger, er det sjældent den bedste metode.

En anden mulighed for at forlænge virkningen er ved at give en såkaldt konstant infusion, hvor der tilføres medicin med en konstant hastighed via et drop direkte ind i blodbanen. Dette er den bedste måde til at kontrollere tilførslen af medicin, men patienten behøver hjælp for at kunne bruge denne metode, så den anvendes udelukkende på hospitaler.

Det mest almindeligt brugte alternativ er at tage flere piller med et fast interval. Denne form for medicinering kaldes multipel dosering. Her er det igen vigtigt at være sikker på, at man ikke tager dem så ofte, at man får bivirkninger på grund af en overdosis, men samtidig dog er omkring den ønskede koncentration i blodet.

Når man foretager multipel dosering, vil man normalt give den næste pille, før det tidligere medicin er helt ude af kroppen. Derved får man en ophobningseffekt, hvor koncentrationen efter et stykke tid vil begynde at svinge omkring et middelniveau. Dette middelniveau kaldes også *steady state* koncentrationen eller C_{ss} , og den opstår, når den tilførte mængde medicin er lig med den mængde, der elimineres fra kroppen. For at bestemme steady state niveauet må man først se på, hvor meget der i gennemsnit tilføres til blodet. Hvis der gives et antal piller med dosis A_0 med et interval τ , og vi ved, at kun brøkdelen F når blodet, vil den gennemsnitlige tilførselsrate R_{ind} blive

$$R_{ind} = \frac{F \cdot A_0}{\tau} \quad (21)$$

Vi ved ifølge ligning (3), at der bliver fjernet mængden $K \cdot A$ pr. tid. I steady state skal det være lig R_{ind} , da den tilførte mængde medicin skal være lig den eliminerede mængde. Ved at bruge den viden og ligning (1) fås

$$R_{ind} = K \cdot A = K \cdot V \cdot C_{ss} \quad (22)$$

Ved at isolere C_{ss} og bruge R_{ind} fra ligning (21) fås

$$C_{ss} = \frac{R_{ind}}{K \cdot V} = \frac{F \cdot A_0}{\tau \cdot K \cdot V}$$

Ved indtagelse af flere piller med paracetamol i løbet af en dag vil der også her ske en ophobning af stoffet i kroppen som følge af halveringstiden på over to timer. Patienten vil derfor opnå højere C_{max} værdier sammenlignet med indtagelse af en enkelt dosis. Hvis der eksempelvis tages en dosis på 1000 mg hver 4. time, vil koncentrationen svinge omkring ca. 17 mg/L, hvilket skal ses i forhold til eksempel 4, hvor C_{max} for en enkelt dosis på 1000 mg blev bestemt til ca. 15 mg/L.

Eksempel 7:

Steady state niveauet for paracetamol ved at tage en pille på 1000 mg hver 4. time beregnes som

$$C_{ss} = \frac{R_{ind}}{K \cdot V} = \frac{F \cdot A_0}{\tau \cdot K \cdot V} = \frac{0,89 \cdot 1000 \text{ mg}}{4 \text{ timer} \cdot 0,3 \text{ timer}^{-1} \cdot 42 \text{ L}} = 17,66 \text{ mg/L}$$

Hvis man i stedet for tager pillen hver 6. time beregnes steady state niveauet som

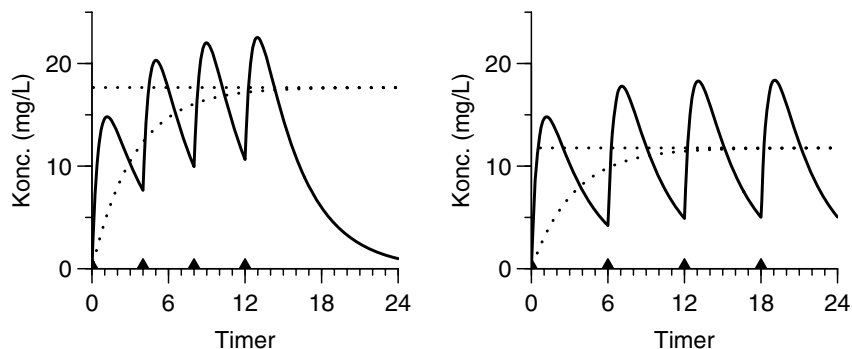
$$C_{ss} = \frac{R_{ind}}{K \cdot V} = \frac{F \cdot A_0}{\tau \cdot K \cdot V} = \frac{0,89 \cdot 1000 \text{ mg}}{6 \text{ timer} \cdot 0,3 \text{ timer}^{-1} \cdot 42 \text{ L}} = 11,77 \text{ mg/L}$$

Det er relativt ligetil at bestemme koncentrationsprofilen ved multipel dosering, når man på forhånd har fundet profilen for en enkelt oral dosis. Efter dosis nummer to beregnes den samlede koncentration som summen af bidraget fra den første og den anden dosis og fra alle følgende doser. På den måde bliver den samlede koncentrationsprofil en sum af de enkelte koncentrationsprofiler, hvor hver er forskudt med tiden mellem indtagelse af medicinen. Matematisk kan den samlede koncentrationsprofil C_{MD} skrives som

$$C_{MD}(t) = C^{oral}(t-t_1) + C^{oral}(t-t_2) + \dots + C^{oral}(t-t_N) = \sum_{i=1}^N C^{oral}(t-t_i) \quad (23)$$

hvor $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$ er de N doseringstidspunkter, og $C^{oral}(t)$ er som defineret i ligning (9), hvor der gælder den naturlige begrænsning, at $C^{oral}(t) = 0$ når $t < 0$.

I figur 7 er koncentrationsprofilerne fra de to doseringsintervaller i eksempel 7 for 1g taget 4 gange med enten 4 eller 6 timers mellemrum vist, hvor de begge er beregnet ved summen af forskudte profiler. Den vandrette stiplede linje i figuren viser det beregnede steady state niveau, mens den stigende stiplede linje viser, hvordan koncentrationen ville stige i patienten, hvis den tilførte mængde blev givet ved konstant infusion i stedet for som her med piller.



Figur 7. Koncentrationsprofil ved multipel dosering af 1g paracetamol 4 gange.

Det kan vises, at man ved fortsat multipel dosering vil nå i nærheden af steady state niveauet efter 3-4 halveringstider uafhængigt af doseringsintervallet. I eksempel 6 blev halveringstiden for paracetamol bestemt til 2 timer og 19 minutter, så her vil det forventes at nå i nærheden af steady state niveauet i løbet af 7-9 timer. Ud fra de to koncentrationsprofiler i figur 7 virker dette ganske rimeligt.

Et naturligt mål ved multipel dosering med paracetamol vil være at holde patienten smertefri i en kortere eller længere periode. Hvis man går ud fra grænsen om 10 mg/L for smertestillende virkning, kan man ved at studere de to profiler se, at der er nødvendigt at tage medicinen hver fjerde time for at holde sig over denne grænse. Man skal dog huske, at der kun bør tages i alt 4g i løbet af et døgn. Hvis man vil fordele virkningen jævnt over 24 timer, er det derfor nødvendigt at dosere med 6 timers mellemrum og så leve med en mindre virkning i nogle perioder eller evt. at benytte en anden medicin som supplement. Fra en sikkerhedsmæssig synsvinkel kan koncentrationsprofilerne også bruges til at undersøge, hvor meget koncentrationen svinger omkring de beregnede steady state niveauer. I de to viste tilfælde ses, at de maksimale koncentrationer ikke når i nærheden af den øvre grænse af behandlingsvinduet, som det blev beskrevet tidligere. Det er dog vigtigt at pointere, at der er andre bivirkninger, som man ikke kan kortlægge ved hjælp af koncentrationsprofilen, og derfor er det altid vigtigt at følge vejledningen i pakken.

Dette kapitel har beskrevet nogle af de grundlæggende koncepter inden for matematisk modellering af medicin i kroppen. Ved analyse af data fra rigtige medicinske forsøg er det også nødvendigt at opstille modeller for måleusikkerheden og for den naturlige variation mellem personer. Dette kræver et vist kendskab til statistik, men det er samtidigt lige så vigtigt at have et godt fundament inden for fysiologi og farmakologi. Denne tværfaglige kombination er med til at fremme udviklingen af mere præcise modeller, der i sidste ende vil komme patienten til gode.

OPGAVER



- 1) Middelfprofilen ved multipel dosering er givet ved $C(t) = R_{ind}/(K \cdot V)(1 - \exp(-K \cdot t))$. Vis, at den vil tilnærme sig C_{ss} efter et stykke tid. Hint: Se hvad der sker, når t bliver meget stor.
- 2) I teksten bliver det nævnt, at man når 90 % af C_{ss} efter 3-4 halveringstider. Bestem ved hjælp af formlen fra øvelsen ovenover præcist, hvornår det ifølge teorien sker.

Artiklens forfattere



Ph.d-studerende Anna Helga Jónsdóttir



Ph.d-studerende Søren Klim



Ph.d-studerende Stig Mortensen



Professor Henrik Madsen



Hvorfor kører
Michael Rasmussen
så hurtigt op ad
bakke?
Og hvorfor vinder
Tom Boonen
spurterne?

- en fortælling om potensfunktioner

Tour de France søndag den 10. juli 2005. Michael Rasmussen vinder bjergetapen overbevisende og skaber herved grundlaget for sin sejr i konkurrencen om den polkaprikkede bjergtrøje. Senere når han op på en andenplads i den samlede stilling, men selv da tror han ikke for alvor på en podieplads og sagde: "Jeg taber mindst 5 minutter på enkeltstarten". Det gjorde han som forudsagt, og mere til, men hvordan kunne han på forhånd vide dette?

Tour de France 1993-1999. "Super" Mario Cipolini excellerer på de flade etaper og vinder flere sejre. Så snart feltet rammer bjergene, kryber han dog ind i team-bilen og lader sig transportere hjem til Italien til stor fortrydelse for tour-arrangørerne. "Jeg har jo ikke en chance i bjergene" er Mario Cippolinis begrundelse, men hvorfor tager han sig ikke bare sammen og konkurrerer om den samlede sejr?

Tour de France 1998. På den 15. etape når Marco "il pirate" Pantani toppen af bjerget og får da omgående overrakt to fulde flasker med vand, som han sætter fast på cyklen uden at drikke af dem. Hvis han ikke drikker vandet, hvad skal han så med flaskerne?

I dette kapitel skal vi se på, hvordan man ved hjælp af matematik kan svare på disse spørgsmål.

Sammenhæng mellem vægt, muskelkraft og vindmodstand

"Grimpeurs" kaldes de små bjergkonger i de store etapeløb. I bjergene er de helte, men de vinder sjældent de store etapeløb, fordi de er for lette til at gøre sig gældende på de oftest flade enkeltstarter. Vi ved altså godt, at bjergrytternes succes har noget med deres vægt at gøre. En typisk bjergrytter som Michael Rasmussen vejer omkring 58 kg, mens badevægten ryger op på 80 kg, når en sprinter-specialist som Tom Boonen træder op på den. De små ryttere har simpelthen færre kilo, der skal bæres op over bjerget – men de har jo også tilsvarende mindre muskler, så hvad er sammenhængen? En simpel matematisk model for, hvordan effekterne af tyngdekraften, vindmodstanden og muskelstyrken afhænger af en rytters vægt, giver svar på, hvorfor en rytters vægt er afgørende for, om han excellerer på de flade vindomsuste strækninger eller på bjergenes nådesløse stigninger.

Forsøg lavet ikke blot på cykelryttere, men for mange andre sportsgrene viser, at den maksimale muskelkraft kan beskrives som en potensfunktion af deres vægt x og er cirka proportional med vægten $x^{3/4}$ (se boks). Hvis man bliver dobbelt så stor, bliver man

altså ikke dobbelt så stærk, men kun $2^{3/4} = 1,68$ gange så stærk. En lille person er derfor stærkere pr. kilo end en stor person.

Vindmodstanden afhænger af, hvor hurtigt man kører, og hvor stort et areal man har eksponeret fortil mod vinden. Arealet af en person afhænger også med en potensfunktion af vægten cirka proportionalt $x^{2/3}$. Hvis man bliver halvt så tung, bliver den vindmodstand, man skal overvinde derfor ikke halveret, men kun reduceret med en faktor $1/2^{2/3} = 0,63$. En lille rytter oplever derfor en større vindmodstand pr. kilo end en stor person.

Sammenhæng mellem rytterens vægt og terrænets stigning

På flad vej bliver muskelkraften $3 x^{3/4}$ balanceret af vindmodstanden $0,001 x^{2/3} f^2$, hvor f er hastigheden, således at:

$$3 x^{3/4} = 0,001 x^{2/3} f^2 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{3/0,001} \frac{x^{3/4}}{x^{2/3}}.$$

Ved at benytte regnereglen $x^a/x^b = x^{a-b}$ fås:

$$f(x) = \sqrt{3000} x^{3/4-2/3} = 55 \sqrt{x^{1/12}}.$$

Da $\sqrt{x} = x^{1/2}$ og $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$ fås:

$$f(x) = 55 x^{1/24}.$$

$f(x)$, dvs. den maksimale hastighed, er altså en svagt voksende funktion af vægten x (se figur 1). Jo tungere en rytter er, jo hurtigere vil han kunne køre på flad vej. De tunge ryttere dominerer derfor den første tredjedel af Tour de France, som typisk foregår på de flade nordfranske sletter.

I bjergene skal rytterne ikke blot overvinde luftmodstanden, men også tyngdekraften, som er proportional med hældningen og med vægten x af rytteren. Ved at tilføje tyngdekraften kan hastigheden ved en 5 % stigning $f_5(x)$ og 10 % stigning $f_{10}(x)$ skrives som:

$$f_5(x) = \sqrt{3000 x^{1/12} - 500 x^{1/3}}$$

$$f_{10}(x) = \sqrt{3000 x^{1/12} - 1000 x^{1/3}}.$$

Funktionen, der beskriver hastigheden som funktion af vægten, er nu blevet kvadratroden af en differens mellem to potensfunktioner. Ved lave vægte vil det første led $x^{1/12}$ dominere, men som vægten stiger, vil det andet led $x^{1/3}$ få overtaget, således at funktionen nu får et maksimum (figur 1). Dette maksimum kan beregnes eksplicit som en funktion ved at generalisere $f(x)$ til en funktion af to parametre, vægten x og hældningen y :

$$f(x,y) = \sqrt{3000 x^{1/12} - 10000 y x^{1/3}}.$$



Jo tungere en rytter er, jo hurtigere vil han kunne køre på flad vej. De tunge ryttere dominerer som regel den første tredjedel af Tour de France, der sædvanligvis foregår på de flade nordfranske sletter.

Maksimum af $f(x,y)$ som funktion af x kan findes ved brug af lommeregner som:

$$x_{\max} = 3 \cdot 10^{-5} y^4.$$

Dette er en kraftigt faldende funktion af hældningen y . Som også kan ses af figur 1, falder vægten af den optimale rytter, jo stejlere hældningen er. Når hældningen y er nul, divergerer x_{\max} mod uendeligt; på flad vej er den største rytter hurtigst.

På de stejle nedkørsler træder rytterne ofte ikke i hjulene. Man kan derfor ignorere muskelpkraften. Kraften til fremdrift leveres af tyngdekraften, som skifter fortegn. I det tilfælde kommer $f(x)$ til at bestå af en potensfunktion, f.eks. for 10 % nedad:

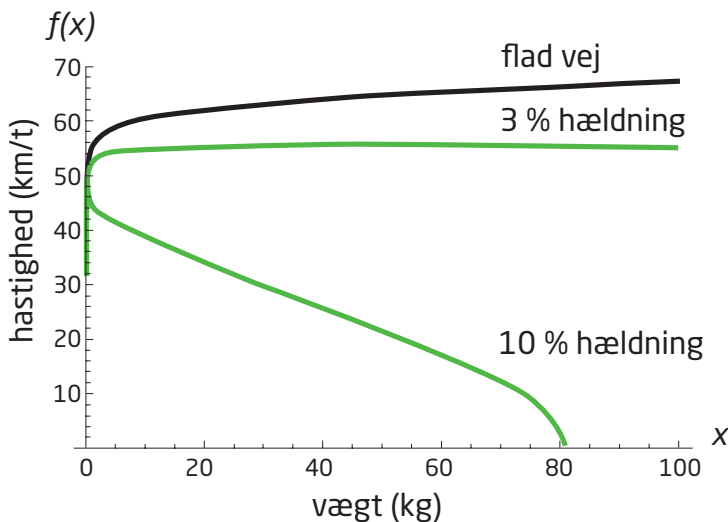
$$f_{-10}(x) = \sqrt{1000 x^{1/3}} = 32 x^{1/6}.$$

Funktionen er nu igen blevet en voksende funktion af massen, blot vokser den nu endnu hurtigere, end den gjorde på flad vej. Situationen er derfor som på flad vej, hvor den tunge rytter har en fordel, bare endnu mere udtalt.

Tour-planlægning

Michael Rasmussen og andre små ryttere har et problem i forhold til de tungere ryttere fordi luftmodstanden opleves relativt stærkere for de små ryttere. På de almindelige flade etaper kan de små bjergryttere blive "pakket ind" af deres hold, således at de bliver beskyttet for noget af vinden. Dermed undgår de at blive kørt agterud af feltet. På enkeltstarterne er de dog uden denne beskyttelse fra deres hold, og de taber derfor ofte adskillige minutter, helt som Michael Rasmussen forudsagde i 2005. I bjergene er hastigheden meget lavere og gevinsten ved at ligge på baghjul tilsvarende mindre. De store ryttere må derfor ofte se sig sat af bjergrytteren, når det bliver rigtig stejlt. På nedkørslen derimod er bjergrytteren endnu dårligere end de tunge ryttere, og de forsøger at kompensere ved at læsse lidt ekstra vand og dermed vægt på, hvis de har muligheden for det.

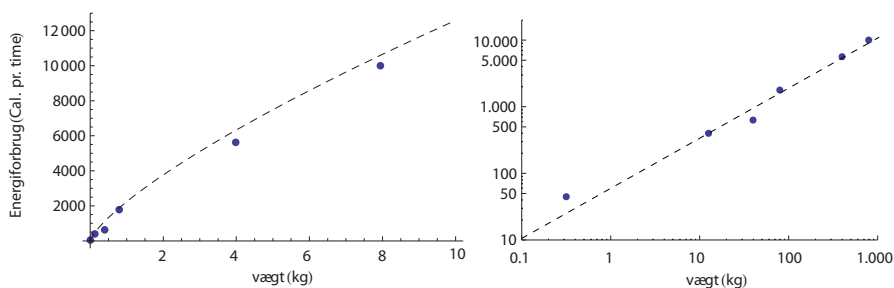
Hvis man har et højdekort over en given etape, kan en matematisk model som den, der er udviklet her, bruges til at sige noget om, hvilken type rytter der har størst chance for at vinde. Ved at designe et etapeløb med en korrekt vekslen mellem flade strækninger og bjergetape kan man altså balancere løbet, således at ingen specifik ryttertype bliver favoriseret. Derfor er den typiske vinder af Tour de France også en såkaldt "komplet" rytter, som kan lidt af det hele, og som ligger i en mellemvægt kategori. Måske benytter Tour de France-ledelsen sig netop af en matematisk model som led i deres bestræbelser på at opnå et balanceret løb år for år?



Figur 1. Den forventede hastighed $f(x)$ som funktion af vægten x for tre forskellige hældninger. På flad vej har store ryttere en fordel over små ryttere. Ved 3 % hældning er forskellen stort set udlignet. På en meget stejl stigning er den forventede hastighed langt lavere end på flad vej, og små ryttere har en klar fordel.

Potensfunktioner og dobbeltlogaritmiske akser

En potensfunktion kan med fordel tegnes i et koordinatsystem med dobbeltlogaritmiske akser, da den derved bliver til en ret linje. Hvis vi tager logaritmen på begge sider af funktionen $g(x) = a x^b$, får vi $\ln(g(x)) = \ln(a x^b)$. Ved at benytte at $\ln(c d) = \ln(c) + \ln(d)$, fås $\ln(g(x)) = \ln(a) + \ln(x^b)$. Endelig ved at bruge $\ln(x^b) = b \ln(x)$, fås: $\ln(g(x)) = \ln(a) + b \ln(x)$. Hvis vi definerer $y = \ln(g(x))$, $A = \ln(a)$ og $X = \ln(x)$ fås $y = A + bX$. Dette er ligningen for en ret linje med hældningen b . Hvis x -aksen bliver transformeret til $\ln(x)$ og y -aksen til $\ln(g(x))$, fås altså en ret linje.

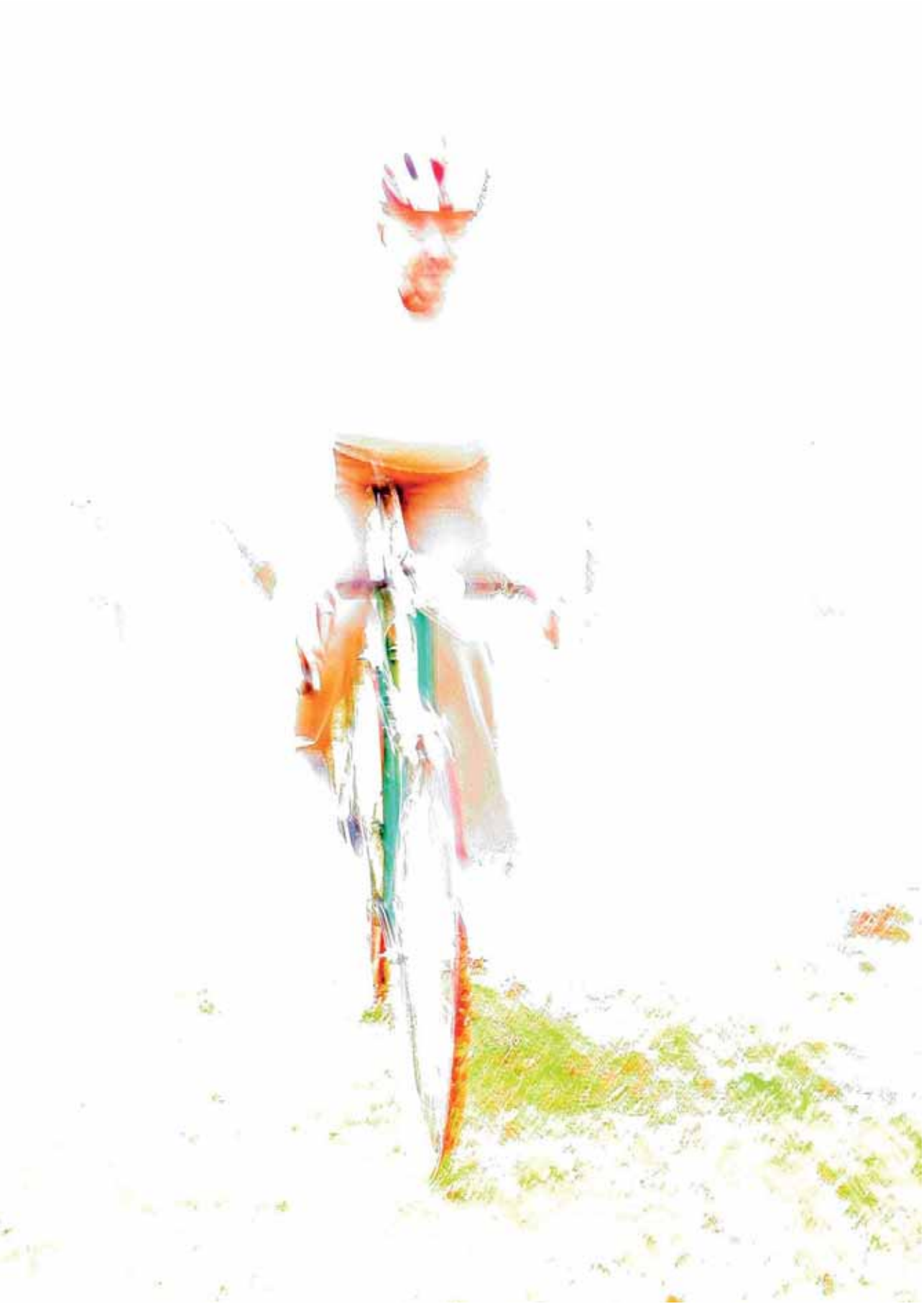


Ovenfor er vist forbruget af ilt ved bevægelse målt for forskellige organismer som funktion af deres størrelse. Forbruget er tegnet i et almindeligt koordinatsystem til venstre og med dobbeltlogaritmiske akser til højre. Når forbruget er tegnet i dobbeltlogaritmisk plot, bliver det til en ret linje, hvilket viser, at sammenhængen mellem vægt (x) og iltforbruget er en potensfunktion. Eksponenten af potensfunktionen er $3/4$, hvilket giver en hældning på $3/4$. Målingerne er taget fra Hemmingsen: "Energy metabolism as related to body size" (1960).

Artiklens forfatter



Seniorforsker Ken H. Andersen







Kvinder og matematik - vil du være med?

Statistik og matematik burde i virkeligheden være rigtige kvindefag. Dels er matematik et fag, som mange piger i gymnasiet godt kan lide, og som de er dygtige til. Dels er der mange spændende anvendelser af statistikken og matematikken – lige fra 'Hvordan finder man ud af, hvilken medicin der virker bedst mod brystkræft?' til 'Hvordan sparer vi CO₂?'. Arbejder man som anvendt matematiker, består ens job i at 'oversætte' spørgsmål fra den virkelige verden til matematik – regne på dem – og formidle resultatet til f.eks. brugerne eller pressen. Jobbet er udadvendt, og man samarbejder ofte med mange faggrupper. Derfor har man brug for at være kreativ og have gode kommunikationskompetencer.

Der er mange muligheder inden for matematikkens verden, som appellerer stærkt til kvinderne. Ud over de udadvendte projekter, tværfagligt samarbejde, rejser og opgaver i samarbejde med offentlige og private virksomheder så oplever de kvindelige studerende, at det at arbejde med matematik ikke kun er noget med at læse en masse bøger og sidde bag en computer og taste, men at deres viden meget hurtigt kan benyttes til at løse konkrete opgaver inden for f.eks. miljø- og sundhedsområdet.

Der er stadig en overvægt af mandlige studerende på Danmarks Tekniske Universitet, men det er sandsynligvis et spørgsmål om få år, inden dette ændrer sig. Flere unge kvinder end unge mænd vælger i dag en ungdomsuddannelse, og andre fag som eksempelvis medicinstudiet, der tidligere har været betragtet som overvejende mandefag, har allerede nu et flertal af unge kvinder. I dette kapitel kan du møde eksempler på, hvordan kvinder oplever at være matematikstuderende, og høre lidt om de mange karrieremuligheder, der findes, når man har matematiske fag i bagagen.

Kvinder skal involvere sig

Docent Helle Rootzén, DTU Informatik, har i over 20 år beskæftiget sig med statistik – et fag, der traditionelt har tiltrukket mandlige studerende og er blevet opfattet som nørdet, men nu er kvinderne på vej. DTU har ikke så mange kvindelige undervisere endnu, så mange piger forestiller sig ikke en karriere som universitetsansat. Helle Rootzén mener derfor, at der er brug for nogle forbilleder, som kan vise, at en stilling som matematisk forsker er et superspændende og afvekslende job. Hun siger: "Det er vigtigt, at vi kvinder involverer os på DTU, både fordi det er en sjov arbejds- og studieplads, men også fordi

der skal være en vis volumen af kvinder på alle niveauer, for at kvinder kan få indflydelse på deres eget arbejds- og studieliv. Hvis vi ikke er bredt repræsenteret, må vi gøre tingene på mændenes præmisser – ikke fordi mændene har bestemt det af ond vilje, men fordi det naturligt nok er dem, der stort set har defineret præmisserne, eftersom der nu engang ikke har været kvinder til at blande sig i beslutningsprocesserne.”

Helle Rootzén både forsker, underviser og har administrative jobs. For eksempel er hun ved at udvikle et nyt e-lærings-system – HEROS. Et kursus udviklet i HEROS kan tilpasses den enkelte studerende, så det følger den studerendes niveau og læringsstil. Foreløbig har hun sammen med en stor dansk virksomhed udviklet et videreuddannelseskursus i statistik i HEROS, der udbydes over hele verden. Desuden er hun studieleder for en masteruddannelse i matematiske modeller og computing – MMC Master. Helle forklarer videre: ”Jeg elsker at vejlede studerende – både specialestuderende og ph.d.-studerende. Projekterne er altid i samarbejde med en virksomhed, hvor de studerende løser virkelige problemer for virksomheden. Og så underviser jeg selvfølgelig de studerende på vores institut, og det er altid en sjov, givende og udfordrende arbejdsopgave.”

Gennem sin undervisning kommer hun i kontakt med mange af de kvindelige studerende på instituttet. Her oplever hun, at nogle kvinder kan være usikre på, om de nu kan klare det rent fagligt. De er i tvivl om, hvorvidt de er gode nok, og om faget er for svært for dem. De stiller spørgsmål til faget og til deres kompetencer, som man ikke hører mændene spørge om – ikke fordi kvinderne er dårligere – ofte tværtimod. Helle Rootzén siger afsluttende: ”Vi udvikler hele tiden studiemiljøet, benytter hjælpelærere, arrangerer forskningsprojekter ud af huset og samarbejder på tværs af fagene. Det har en tiltrækningskraft på mange kvinder, fordi det er lidt sjovere at lave noget sammen og i fællesskab bære projekterne igennem. Jeg kan kun opfordre de kvinder, der interesserer sig for matematik, til at gribe muligheden og læse videre inden for matematikkens fagområde efter endt studentereksamen.”

Hvordan udregner man statistisk, hvordan det går med vandmiljøet i Danmark, og kan man forudsige, hvilke unge der bliver udsat for velfærdssygdomme senere i livet? Docent Helle Rootzén, DTU Informatik, har i over 20 år beskæftiget sig med statistik – et fag, der traditionelt har tiltrukket mandlige studerende og er blevet opfattet som nørdet, men nu er kvinderne på vej.



Et plaster på såret

Måske har du lige spist en pille, fordi du har ondt i hovedet eller har menstruations-smerter – og måske hjælper pillen, så det snart ikke gør ondt mere. Det er fint nok – men har du tænkt på, om den pille, du lige har spist, mon har nogle bivirkninger? Civilingeniør Nasrin Faqir giver ved hjælp af statistiske analyser kvalificerede bud på, om et medicinsk produkt giver bivirkninger. Medicinalfirmaer bruger meget store summer på at udvikle ny medicin og forbedre deres produkter. Der stilles store krav til, at medicinen skal afprøves grundigt, inden den sendes på markedet. Men kontrollen af medicinen stopper ikke, selv om produktet er taget i brug. For eksempel registreres det nogle gange, hvordan det går de patienter, der har fået et givent produkt med et formål at finde ud af, om patienterne har flere tilfælde af bivirkninger, der kan påvises at skyldes selve brugen af produktet.

Nasrin fortæller: ”I forbindelse med nogle former for operationer benyttes der et specielt plaster. For at finde ud af, om det giver bivirkninger, indsamler man oplysninger om de patienter, der har fået sat sårplastret på efter en operation – hvilke sygdomme har de haft? Hvad er de blevet opereret for? Hvilke risikofaktorer havde de? Hvilke laboratorietests har de fået foretaget i løbet af indlæggelsen? Desuden undersøges de typer medicin, som patienterne har taget, og patienternes medicinske baggrund samt, hvordan er det gået patienterne efterfølgende. Er de døde eller i live? Ud fra disse og en lang række andre oplysninger kan man ved hjælp af statistiske analyser finde et bud på, om plastret giver bivirkninger”.

Oversætter lægers beskrivelser til matematik

”De statistiske analyser baserer sig på matematiske modeller. Med forskellige matematiske modeller prøver jeg at finde den model, der er simplest, men som alligevel giver en god beskrivelse af f.eks. årsager til bivirkningerne. For at lave disse modeller og analyser kræver det, at jeg kan en god portion matematik og statistik. Samtidig skal jeg være god til at kommunikere for at kunne forstå og spørge ind til lægernes beskrivelser og ’oversætte’ dem til matematik. Når analyserne er udarbejdet, skal jeg desuden være god til at fortolke resultaterne i forhold til, hvad de betyder i den medicinske verden, og kunne kommunikere denne betydning til læger, sygeplejersker og patienter”.

Matematik var ikke mit første valg

”Det var egentlig tilfældigt, at jeg valgte at læse matematik. Da jeg gik i gymnasiet, havde jeg et negativt syn på matematik og interesserede mig ikke særlig meget for faget. Det var da også studiet som softwareingeniør, jeg begyndte på, da jeg startede på DTU. Men midt i studieforløbet blev jeg interesseret i matematik. Jeg fandt ud af, at matematik alligevel ikke er så svært, som jeg gik rundt og troede. Jeg kunne se, at der med matematikken er mange muligheder, og hvis jeg blev dygtig til matematik, var der pludselig mange døre, både studiemæssigt og jobmæssigt, der åbnede sig”.

”Skiftet til matematikstudiet skete bl.a., fordi jeg opdagede, hvor vigtig en medspiller matematik er i medicinalindustrien. Jeg kunne se en fremtidig karrieremulighed for mig inden for netop den verden. Jeg kunne se, at man kunne bruge matematik til at undersøge folks sygdomsforløb og herved bidrage til at stille bedre diagnoser, tilbyde bedre behandlingsmetoder og finde årsager til sygdom. Indtil da havde jeg egentlig kun tænkt på matematik som noget, man kunne bruge til at lave økonomiske modeller ud fra”.

Om få måneder føder Nasrin sit andet barn, og indtil da bruger hun tiden på at arbejde som freelancekonsulent for en konsulentvirksomhed, der laver statistiske analyser inden for det område, hun har skrevet speciale i. Når hun har afsluttet sin barsel, vil hun søge job i medicinalindustrien og helst beskæftige sig med at benytte matematikken til at bidrage med viden om sygdomme, årsager til sygdomme og test af forskellige medicinalprodukter.

OPGAVE: bmi



Alle i klassen skal anonymt på en lille lap papir skrive deres alder, køn, vægt og højde. Anonymiteten kan være en fordel, fordi ikke alle har lyst til at fortælle åbent om deres vægt. Herefter indsamles papirlapperne og lægges på lærerens bord.

Læreren tegner et stort skema på tavlen. Kolonnerne i skemaet inddeles i alder, køn, vægt, højde og bmi.

Alder, køn, vægt og højde fra papirstykkerne skrives op i skemaet, og bmi udregnes for hver enkelt person ud fra vægt og højde, via formelen:

$$\text{bmi} = \text{vægt i kilo} / (\text{højde i meter} \times \text{højde i meter})$$

Eksempel: Hvis du vejer 65 kilo og er 1,75 meter høj, fås $\text{bmi} = 65 \text{ kg} : (1,75 \text{ m} \times 1,75 \text{ m}) = 21$

Gennemsnittet og spredningen af bmi beregnes for både piger og drenge. Bmi afhænger af kropsbygning, muskelmasse, køn og alder, derfor er der generelt forskel på pigers og drenges standard-bmi.

En tommelfingerregel er, at personer med bmi under 20 er undervægtige, personer med bmi mellem 20 og 25 er normalvægtige, personer med bmi mellem 25 og 30 er let overvægtige, og personer med bmi over 30 er svært overvægtige.

Da overvægt kan være årsag til nogle alvorlige sygdomme, er demografiske faktorer som alder og bmi vigtige informationer til analyse af sygdomsårsager.

Civilingeniør Nasrin Faqir skrev speciale i statistik på DTU Informatik. Ved hjælp af statistiske analyser undersøgte hun, om et særligt plaster, der bruges efter operationer, eventuelt gav bivirkninger for de patienter, der har fået sat plastret på.



Kønnet bestemmer ikke, om man bliver dygtig til matematik

Man behøver ikke være nørd, bare fordi man er god til matematik. Amne Iskandar og Tine Henriette Johansen har tid til både at have studiejob og til at fordybe sig i matematikken, uden at det går ud over det sociale liv på universitetet og i venskabs- og familie-kredsen.

Amne fortæller: ”Tidligere har jeg hørt folk sige, at matematik er tørt og kedeligt og ikke kan anvendes, før man er færdiguddannet og får konkrete opgaver i en virksomhed. Sådan var det måske tidligere, men i dag synes jeg, at underviserne er fantastisk dygtige til at vise matematikkens anvendelighed, så vi allerede nu både kan bruge den og se flere karrieremuligheder for os. Jeg ved dog ikke, hvad jeg helt konkret vil arbejde med, når jeg bliver færdig, men jeg regner med, at det bliver noget med en masse statistiske undersøgelser, da det er det område, jeg mest brænder for i øjeblikket. Et interessant arbejdsområde er f.eks. den bioteknologiske branche”.

Tine er lige som Amne stærkt interesseret i matematik og it: ”Jeg er uddannet multimediedesigner, men det var meget svært at få job, da jeg stod med eksamensbeviset i hånden. Desuden havde jeg lyst til at læse videre. Det var helt oplagt at vælge et matematikstudie, fordi jeg lige siden folkeskolen har syntes, at det er interessant at pusle med tal og finde resultater. Jeg brænder mest for at fortsætte med at kombinere min viden

fra mine to uddannelser – så pilen peger mod, at jeg skal beskæftige mig med billedanalyse. Hvilken branche det skal være inden for, ved jeg ikke endnu, men det kan jo både være inden for sundhedsvæsenet, medicinalbranchen, sportens verden – jeg ved det ikke, måske sport, da jeg er ret sportsinteresseret og selv dyrker en del sport. Jeg oplever det som meget positivt, at der er mange muligheder, min kunst bliver så at finde det område, jeg brænder allermost for”.

Studiejob med indhold

Amne siger videre: ”Jeg har tidligere haft studiejob i Sundhedsstyrelsens Forskerserviceenhed, hvor jeg arbejdede med dataudtræk fra registre, f.eks. landspatientregistret eller dødsårsagsregistret. Men nu arbejder jeg i virksomheden StatCon, hvor jeg bl.a. skal lave statistiske analyser. Det er fantastisk, at jeg allerede før jeg er færdiguddannet, kan bruge min faglige viden til at udføre konkrete arbejdsopgaver i det virkelige liv”.

Tine: ”Jeg har studiejob på www.videnskab.dk, hvor jeg udvikler grafik til de mange forskellige typer artikler, ja, jeg designer også brevpapir, bogmærker og laver quizzes i JavaScript. Det er et meget spændende arbejde, hvor jeg både får brugt min multimediedesigneruddannelse og gør brug af viden fra min nuværende uddannelse. Jeg har også et lille ekstra studiejob i samme virksomhed som Amne, hvor jeg bl.a. skal lave Flash til brug for virksomhedens konsulenter, når de afholder kurser”.

Matematik er også for piger

Da Amne begyndte på studiet, var de 10 piger og 30 drenge. Ifølge Amne var dette en positiv overraskelse, fordi hun havde været lidt nervøs for, at der slet ingen piger var tilmeldt: ”Endnu er der ikke nogen af pigerne, der er faldet fra. Jeg ved ikke hvorfor, pigerne er så gode til at holde fast i studiet – måske er det, fordi de piger der vælger netop dette studie, har gjort sig ekstra mange tanker omkring beslutningen. Derfor er pigerne måske helt sikre i deres valg allerede fra første dag på instituttet. Det er mere uden for universitetet, at jeg oplever, at folk tror, at matematik er et fag for drenge. Især ældre mennesker kan godt spørge: ’Hvad laver sådan en pige som dig på et matematikstudie?’ Det er ok, at de spørger sådan, for jeg oplever samtidig, at de har stor respekt for mit valg. Jeg tror blot de undrer sig lidt”.

Tine fortæller, at der er en del fester og arrangementer i begyndelsen af studietiden, hvor man bliver rystet godt sammen. Det betyder måske også, at alt det med, hvor mange piger og drenge der er på studiet, får mindre betydning: ”Vi lærer hurtigt hinanden at kende som mennesker og ikke kun som drenge eller piger. Især i starten kunne matematikken være svært. Og vi har nok allerede nu glemt de mange timer, hvor vi har svedt og kæmpet med opgaver om algebra og beviser, som ikke altid var lige lette eller spændende at løse. Men det med at knokle er jo ikke noget, vi oplever, bare fordi vi er af hunkøn. Fyrene har jo haft det på samme måde som os! Så vi tror ikke, at kønnet bestemmer, hvor mange timer man skal bruge, eller hvor meget man skal knokle for at blive dygtig”.



Amne Iskandar (tv) og Tine Henriette Johansen i en af DTU's databarer. "Måske er det, fordi de piger, der vælger netop dette studie, har gjort sig ekstra mange tanker omkring beslutningen. Derfor er pigerne måske helt sikre i deres valg allerede fra første dag på instituttet. Det er mere uden for universitetet, at vi oplever, at folk tror, at matematik kun er et fag for drenge."

(Foto: Thomas Hjort Jensen)

Kvinderne er på vej ind i matematikkens verden

Circa en tredjedel af de civilingeniørstuderende på DTU er kvinder, og over årene er antallet af kvinder, der vælger at læse på DTU, svagt stigende. I sommeren 2008 blev der optaget 16 kvinder og 47 mænd på Matematik og teknologi-bacheloren (Kilde: Den Koordinerede tilmelding, Matematik og Teknologi).

Gennemsnitsalderen for studerende, både mænd og kvinder, der begynder på DTU's civilingeniøruddannelse, er 21 år, og de har et gennemsnit på 8,4 (efter ny 7-trins-skala) fra den adgangsgivende eksamen. Den hyppigste adgangsgivende eksamen er den matematiske studentereksamen efterfulgt af HTX.

Researcher i den finansielle verden

Anna Szymkowiak-Haves interesse i research har ført hende til drømmejobbet som Senior Manager i Saxo Bank, hvor hun søger i enorme databaser efter specifikke informationer om kunders behov for ydelser og produkter. ”Jeg arbejder med research, eller rettere sagt med data mining, en metodik, eller en række af metoder, som bruges til at analysere data, f.eks. variation i data og identifikation af data, hvor jeg søger efter mønstre og strukturer i store datamængder”, fortæller hun. Med i bagagen har Anna Szymkowiak-Haves en uddannelse som elektroingeniør fra det tekniske universitet i Szczecin i Polen, dog læste hun de sidste kurser på DTU, og herefter læste hun ph.d. på DTU Informatik.

Måltrettede løsninger til kunderne

Anna forklarer, at størrelsen på databaser kan begrænse muligheden for at forstå data, og i finanssektoren er datamængderne enorme. De søgninger, Anne laver, giver specifikke informationer om f.eks. kunders behov for ydelser eller produkter. På den måde kan banken udvikle markedsføring målrettet dens kunders behov. Anna siger: ”Det var en meget positiv oplevelse i sin tid at komme ud på arbejdsmarkedet, fordi jeg fik opfyldt mit ønske om at anvende min viden i konkrete praktiske projekter, som gav en synlig værdi nu og her både for mig og for virksomheden. Den forskning og det udviklingsarbejde, jeg udfører her, har først og fremmest betydning for den virksomhed, jeg er ansat i. Men selvfølgelig er jeg med til at udvikle systemer, som i det større perspektiv er med til at målrette og strømline processer og markedsføring inden for den finansielle verden. Så det er først og fremmest Saxo Bank, der får tilført en værdi, men det er i høj grad vores kunder, der kommer til at få fordele af det arbejde, jeg udfører”.

Anna Szymkowiak-Haves foran Saxo Bank, hvor hun arbejder med data mining, en række af metoder, som bruges til at analysere data for at finde mønstre og strukturer i store datamængder.



”Matematik er ikke hokuspokus, men 90 % slid og 10 % talent. Og hvis man skal være rigtig god til matematik, så kræver det, at man har fantasi og forestillingsevne.”



Dygtige matematikere er fantasifulde

”Der er selvfølgelig altid nogen, som er de fødte talenter, og som har meget nemt ved at lære matematik, men langt de fleste af os skal knokle for at lære den basale matematik. Vel egentlig som med mange andre fag, tysk grammatik f.eks., hvor der er nogle regler, man skal kende for at kunne bruge sproget korrekt. Men når man først kan det, bliver matematik en leg”, siger ph.d.-studerende Gitte Bjørg Windfeldt. Lige for tiden er Gitte på barselsorlov med sin lille nyfødte datter.

”Mens jeg læste matematik, havde jeg studiejob hos Novo Nordisk, hvor jeg brugte matematikken som basis for mit arbejde med statistik. Jeg følte, at jeg slog to fluer med ét smæk, fordi jeg beskæftigede mig med noget menneskeligt relevant samtidig med, at jeg fik mulighed for at bruge min viden om matematik. Jeg blev fanget af statistikken og arbejdet på Novo Nordisk og valgte derfor at tage en erhvervs-ph.d.”

Det handler om at få gode idéer!

”I dag beskæftiger jeg mig mere med statistik end abstrakt matematik. Men man kan ikke arbejde med statistik uden at kunne en god del matematik. Når jeg, skal løse et problem, handler det om at få gode idéer. Og netop det med at få gode ideer er vi matematikere godt trænet i. Som regel skal man afprøve en masse idéer, før man finder en, der virker. Der kan nogle gange gå flere uger, før den rigtige idé dukker op, men lige pludselig så er den der”.

Hos Novo Nordisk arbejder Gitte med at udvikle og videreudvikle metoder, der er med til at sikre kvaliteten af virksomhedens produkter. Metoderne til kvalitetskontrol skal hele tiden være tidssvarende og matche den teknologiske udvikling. En høj kvalitet af produkter som medicin og medicinsk udstyr er af afgørende betydning i sygdomsbehandling.

Matematik giver adgang til mange fagområder

Gitte forklarer: ”Jeg har et fantastisk sjovt og spændende arbejde og opfatter matematik som lidt af en leg. Som matematiker får jeg tilmed mulighed for at sætte mig ind i mange fagområder, fordi jeg skal bruge min viden til at hjælpe andre faggrupper med at løse et problem. Det stiller også krav om, at jeg er god til at kommunikere, at stille spørgsmål og give svar, som kan bruges konstruktivt. I det daglige arbejde bruger jeg sjældent den abstrakte matematik, som jeg terpede på universitetet. Men jeg bruger min erfaring med at sætte mig ind i tungt og svært tilgængeligt stof for at kunne fokusere, disponere og udvælge både i forhold til, hvilke matematiske værktøjer jeg skal bruge til en konkret opgave, og i forhold til at sætte mig ind i andre fagområder. På den måde danner min uddannelsesbaggrund et solidt fundament, som jeg kan bygge videre på i mit arbejdsliv og faglige udvikling”.

”Man kan bruge matematik til utrolig mange ting både i forhold til at få studiejob og i forhold til de job, man kan søge, når man er færdig med sin uddannelse. Man kan som jeg læse videre til ph.d. eller blive gymnasielærer, arbejde i pensionselskaber, i finanssektoren, i computervirksomheder, oprette sin egen konsulentvirksomhed m.m. Der er matematik i stort set alt omkring os, og det er kun fantasien, der sætter grænser for, hvor du vil bruge din viden om matematik”.



’Matematik er ikke noget, kvinder kan!’

Det var, hvad Judith Jacobsen fik at vide, da hun var barn. I dag er hun administrerende direktør i konsulentfirmaet Statcon, hvor viden om matematik og statistik er den vare, hun sælger.

”Man kan bruge matematik og statistik så uendelig mange steder. Uanset hvad man interesserer sig for, er der en matematisk karrieremulighed, der relaterer sig hertil. Det kan være at arbejde med mennesker, kunst, biologi, sundhed, formidling og undervisning”, siger Judith Jacobsen.

På Statens Museum for Kunst har konservatorerne brug for statistisk viden for at bevare den danske kunstskat. Blandt opgaverne er det store antal tegninger, der er tegnet på et tidspunkt, hvor der var syre i den blæk, som tegningerne blev tegnet med. Syren ætser sig gennem papirerne, og hvis der ikke bliver gjort noget ved det, forsvinder tegningerne, og kun omridset af de gamle kunstværker vil stå tilbage.

Det er et omfangsrigt og krævende arbejde at finde frem til de mest optimale metoder til at konservere og bevare kunsten på. Til en del af dette bevaringsarbejde benytter konservatorerne sig i samarbejde

med en statistiker af statistisk forsøgsplanlægning for at finde frem til en metode, som giver det bedste konserveringsresultat og den bedste opbevaring.

”I sådan et forsøg skal der bl.a. tages hensyn til temperatur og fugtighed, typer af opbevaringskasser og mængden af UV-stråling. Ved hjælp af matematisk balancerede forsøg kan resultaterne analyseres. Den matematiske og statistiske viden, sammen med deres konserveringsfaglige viden, er her afgørende for, at konservatorerne kan gøre deres arbejde med at bevare kunstsøkkene”, siger Judith Jacobsen.

Fra matematikforskrækket til matematiknørd

”Jeg begyndte først at interessere mig for matematik for alvor, da jeg blev voksen. Der hvor jeg kom fra, var matematik ikke noget, som kvinder kunne lære, og det skulle man ikke være ked af – ’sådan er det ofte for piger’, fik jeg at vide. Til min store overraskelse var matematik ikke så vanskeligt alligevel. Selv om jeg knoklede hårdt med den. Men jeg knoklede jo også med tysk grammatik, biologi og alle de andre fag”.

”Men hånden på hjertet – det var svært at komme i gang med matematikken både på HF-uddannelsen, og da jeg læste på DTU. Det virkede nogle gange ørkesløst at skulle lære en lang række basale ting, før sammenhængene rigtigt gik op for én. Men samtidig var det også befriende, at matematik er så logisk”.

I 1981 blev Judith Jacobsen optaget på matematikuddannelsen på DTU.

”Det var skidesjovt! Hurtigt blev jeg bidt af først matematikken og dernæst statistikken og tog alle de statistikfag, jeg kunne komme i nærheden af. Efter masteruddannelsen fortsatte jeg med at læse en ph.d. i matematisk statistik”.

Efterfølgende fik Judith Jacobsen job hos medicinalfirmaerne Novo Nordisk og dernæst Lundbeck. Men hun havde lyst til at arbejde mere bredt med statistik end blot at sidde og være specialiseret inden for et afgrænset felt. Derfor tog hun for tre år siden springet og oprettede sit eget konsulentfirma med speciale i anvendt statistik og dataanalyse, hvor de både leverer konsulenttydelser og afholder kurser for ikke-matematikere. I dag har firmaet tre ansatte samt to studentermedhjælpere.

Varierede arbejdsopgaver

I dag er Judith Jacobsens arbejdsopgaver mangeartede med omdrejningspunkt i statistik. Ud over at hun underviser som ekstern lektor på bl.a. Københavns Universitet og Kunstakademiets Konservatorskole samt holder kurser for virksomheder, så løser hun og firmaets medarbejdere også opgaver for ministerier, styrelser og den farmaceutiske og bioteknologiske industri med både klinisk udvikling og andre opgaver i forbindelse med udvikling og produktion af farmaceutiske produkter.

”Et typisk eksempel kan være at udarbejde statistik på effekten af nye behandlinger. Det kan f.eks. dreje sig om en sygdom, som enten ikke kan behandles ordentligt – eller hvor man har en behandling, der giver svære bivirkninger. En farmaceutisk virksomhed, eller et biotekfirma, har via deres forskning fundet en ny behandling, og det skal så vises, at denne nye behandling virker bedre end den, man har haft indtil nu. Her er det bl.a. statistikere, der skal træde til. Statistikere har her et bredt samarbejde med kemikere, speciallæger, folk med viden om regulatoriske bestemmelser og mange flere. Via et sådant

samarbejde får man som statistiker et kendskab til forskellige sygdomsmekanismer, og jeg oplever faktisk, at man gør en forskel og hjælper mennesker til bedre behandlingsmuligheder og dermed et bedre liv. Det pirrer min nysgerrighed at få indsigt i så mange spændende emner”.

Der er brug for os i samfundet!

Judith Jacobsen oplever en stor frihed i sit arbejde i forhold til at vælge opgaver, som hun brænder for og synes er interessante. For eksempel har hun en opgave for Center for Autisme, hvor man i et internationalt samarbejde mellem Danmark, England og Norge har lavet et forsøg med diætintervention for børn med autisme.

”Der findes en del såkaldt anekdotisk viden om, at mange børn med autisme kan have stor fordel ved at undgå at drikke mælk og spise gluten. Hvis det er sandt, er det vigtigt, at den viden bliver belyst med et videnskabeligt forsøg, hvor statistikken sikrer, at der er hold i antagelsen om, at det gør en forskel. Hvis det ikke gør en forskel, er der ingen grund til at holde en besværlig diæt, som måske forringer livskvaliteten for en gruppe, som i forvejen har det svært. Men hvis det i stedet kunne øge deres livskvalitet – måske endda mildne deres autistiske træk – så er det uhyre vigtigt, at dette bliver vist. Tænk bare på Føllings syge, en sygdom, som nyfødte bliver screenet for (sygdommen kan ubehandlet føre til svær hjerneskade og epilepsi). Hvis de børn, der har Føllings syge, ikke bliver behandlet med livslang diæt, vil de blive stærkt retarderede”.

”Jeg oplever et kæmpe behov for kvindelige matematikere ude i erhvervslivet, fordi kvinder ofte er bedre til at anvende statistikken og se anvendelsesmulighederne og ikke mindst er bedre til at formilde den. I det hele taget er der mangel på dygtige mennesker, der kan bruge matematik og statistik. Samtidig er det sejt at være kvinde og være god til matematik”, slutter Judith Jacobsen.

OPGAVE

- 1) Er $0,999$ lig med 1 ? Hvorfor/hvorfor ikke?
- 2) Se nu på tallet $0,999\dots$, hvor de tre prikker betyder, at der er uendelig mange nitaler efter kommaet. Er $0,999\dots$ lig med 1 ? Hvorfor/hvorfor ikke?
(Hint: Sæt $x=0,999\dots$ og gang denne ligning med 10 .)

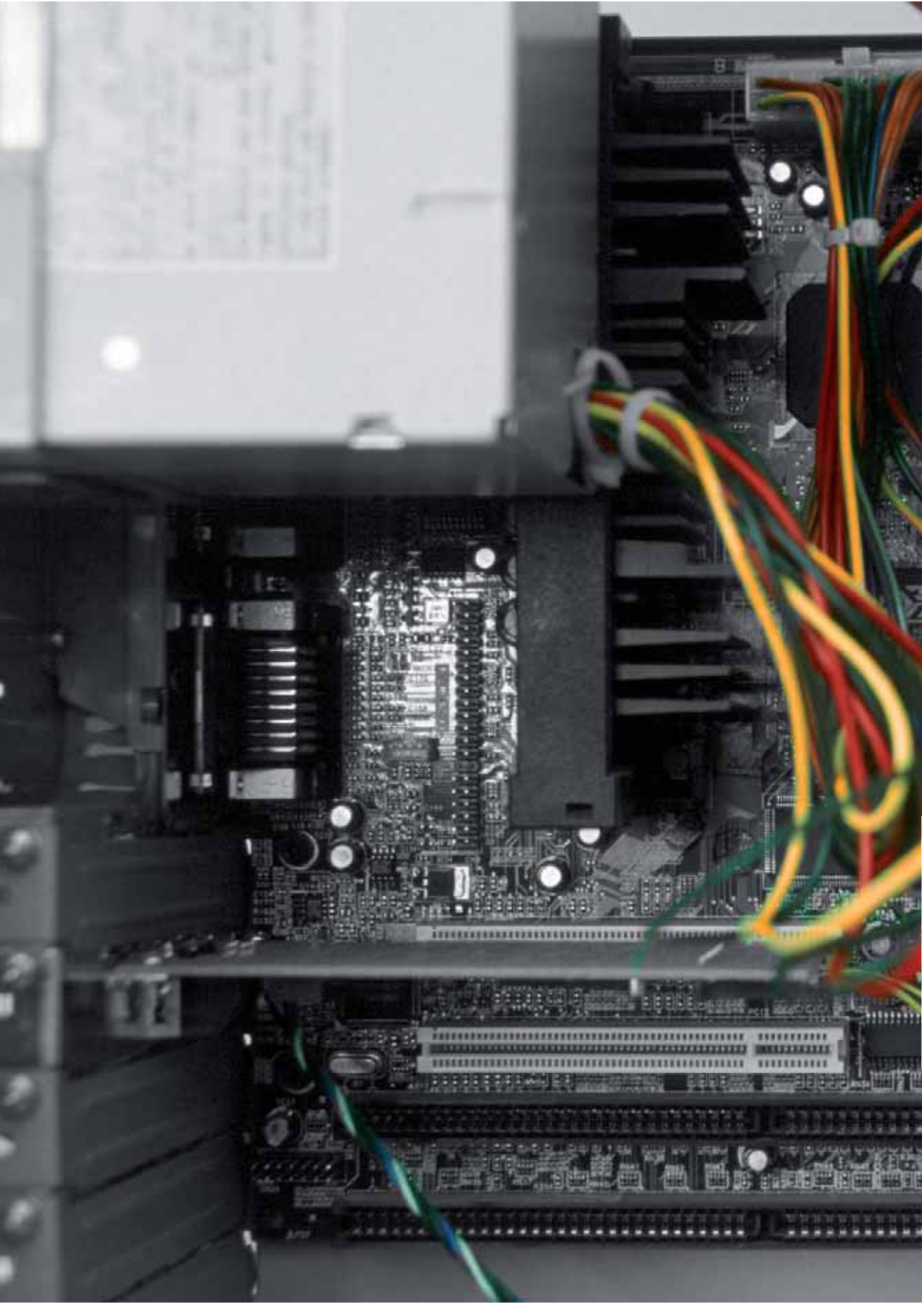
Artiklens forfattere



Docent Helle Rootzén



*Videnskabsjournalist
Mette Minor Andersen*





MATEMATIK IGENNEM MILLENNIER

Matematik i det tyvende århundrede

I det tyvende århundrede skete en enorm udvikling i matematikken. Der blev udført mere original matematisk forskning og helt sikkert publiceret langt mere matematik end i alle de forudgående århundreder tilsammen. Ikke mindst mængdelæren undergik store forandringer og oplevede nye gennembrud, og mange af den moderne matematiks teorier afhænger af begreber herfra.

Problemer i grundlaget for mængdelæren

Med Cantors teori for kardinalitet (størrelse) af mængder, udviklet kort før 1900, fik matematikere endelig hold på og accepterede begrebet uendelig, som indtil da havde været en forhindring og en gåde i matematikken. Imidlertid ventede nye problemer forude. I begyndelsen af det tyvende århundrede blev der givet et grundlag for mængdelæren i et aksiomssystem formuleret af den tyske matematiker Ernest Zermelo i 1908 og forbedret af hans landsmand Abraham A. Fraenkel omkring 1920. Systemet er kendt som *Zermelo-Fraenkel systemet* og er i dag den generelt accepterede basis for mængdelæren.

Et antal paradokser, i særdeleshed det berømte *Russells paradoks*, gav imidlertid alvorlige problemer i mængdelærens grundlag. En version af Russells paradoks fra 1902 stiller spørgsmålet: "I en landsby bliver alle dem, der ikke barberer sig selv, barberet af barberen; hvem barberer så barberen?" Bertrand Russell (1872-1970) var en enestående personlighed i det tyvende århundrede, og sammen med A.N. Whitehead fuldførte han i 1913 det banebrydende arbejde *Principia mathematica* om det logiske grundlag for matematikken. Andre typer af problemer i mængdelæren opstod, da det blev klart, at det såkaldte *udvalgsaksiom* implicit kommer ind i mange matematiske konstruktioner og resultater. Det var derfor et hårdt anslag imod drømmen om at opbygge et komplet logisk aksiomssystem dækkende hele matematikken, da den østrigske matematiker Kurt Gödel i 1931 og den amerikanske matematiker Paul Cohen i 1963 påviste, at *udvalgsaksiomet* såvel som *kontinuumshypotesen* hverken kan bevises eller modbevises – Zermelo-Fraenkel systemet for mængdelæren er med andre ord *ufuldstændigt* (læs mere i kapitlet "Logik, computere og kunstig intelligens").

Højdepunkter fra det tyvende århundredes matematik

I algebra er de to mest spektakulære resultater opnået i det tyvende århundrede uden tvivl dels klassifikationen af de endelige, simple grupper fuldført omkring 1980, med afgørende bidrag af adskillige fremtrædende algebraikere, dels beviset for Fermats sidste sætning kort for årtusindskiftet, først og fremmest forbundet med den engelske matematiker Andrew Wiles.

Hovedparten af forskningen i geometri og topologi i det tyvende århundrede har drejet sig om at opnå indsigt i mangfoldighedsbegrebet. De algebraiske metoder udviklede

sig til algebraiske teorier af selvstændig interesse, som fra omkring 1930 blev omtalt som *algebraisk topologi*. Nogle af de fundamentale metoder udviklet i den algebraiske topologi har yderligere inspireret til nye algebraiske teorier såsom *homologisk algebra* og *kategoriteori*. Studiet af geometriske former beskrevet ved generelle algebraiske ligninger modnedes også til et meget aktivt forskningsområde kendt under navnet *algebraisk geometri*. For sit skelsættende arbejde i algebra, talteori og topologi modtog den franske matematiker Jean-Pierre Serre i 2003 Abel prisen – den første af disse særdeles prestigefyldte priser i de matematiske videnskaber.

I 1956 viste den amerikanske matematiker John Milnor, at differentiable strukturer på kugleflader af højere dimension langt fra er entydige, og initierede derved den nye gren *differentialtopologi* af topologien. I begyndelsen af 1960'erne gav den amerikanske matematiker Steven Smale fundamentale bidrag til klassifikationen af mangfoldigheder af dimension større end 5 og beviste bl.a. den generaliserede *Poincarés formodning*, som karakteriserer kuglefladen i disse dimensioner ved algebraiske invarianter. Fra omkring 1980 har der været en ny periode af stærk vekselvirkning imellem teoretisk fysik og matematik med Michael Atiyah og Simon Donaldson i England som nogle af hovedpersonerne i matematik og amerikaneren Edward Witten som den førende fysiker. I matematik har denne vekselvirkning været instrumentel for klassifikationen af mangfoldigheder i dimension 4, hvoraf vi kun skal nævne den amerikanske matematiker Michael Freedmans bevis for Poincarés formodning i dimension 4 i 1983. I slutningen af 2002 annoncerede den russiske matematiker Grigori Perelman, at han havde bevist den oprindelige Poincarés formodning i dimension 3, og efter den internationale kongres for matematikere i Madrid i 2006 har matematikersamfundet anerkendt beviset som korrekt.

En anden hovedudvikling i matematikken i det tyvende århundrede knytter sig til en stigende interesse for studiet af rum af funktioner og deres egenskaber, som udkrystalliserede sig i den nye gren af den matematiske analyse kaldet *funktionalanalyse*. Blandt pionererne finder man den ungarske matematiker John von Neumann (1903-57) og den polske matematiker Stefan Banach (1892-1945). Andre bemærkelsesværdige nye udviklinger i den matematiske analyse omhandler frembringelsen af abstrakte teorier for mål og integration, der kraftigt udvidede rækkevidden for anvendelser af metoder fra funktionalanalyse i teorien for differentiallyigninger og i teoretisk fysik. Teorien for distributioner blev inspireret af arbejde af fysikeren Paul Dirac (1902-84), der på intuitivt grundlag indførte den såkaldte *deltafunktion* i et berømt arbejde fra omkring 1928, hvori han fuldender den klassiske kvanteteori ved at udlede en ligning for elektronen, som er konsistent med Einsteins relativitetsteori, i modsætning til ligninger af Schrödinger og Heisenberg.

Det tyvende århundrede var ikke alene vidne til spektakulære resultater inden for de individuelle matematiske discipliner, men afdækkede også dybe sammenhænge imellem tilsyneladende meget forskellige grene af matematikken. Særligt bemærkelsesværdigt i denne sammenhæng er det spektakulære arbejde i midten af 1960'erne om indekssætningen for elliptiske operatorer på mangfoldigheder af Michael Atiyah og den amerikanske matematiker Isadore Singer – nu kendt som Atiyah-Singer *indekssætningen*. Dette slagkraftige værktøj gav ikke alene en forklaring på mange tidligere resultater

Kardinaltal

Begrebet *uendelig* har fascineret mennesker til alle tider. Det overstiger vores fatteevne, når man ser ud i det store rummelige univers. Er universet begrænset, eller fortsætter det ud over alle grænser? Og hvis det er begrænset, hvad er der så udenfor? Ens logiske sans og almindelige forestillingsevne bliver uvilkårligt udfordret ved spekulationer over universets udstrækning og over begreberne *uendelighed* og *evighed*.

Det var den tyske matematiker Georg Cantor, der i 1870'erne fik styr på *uendelig* som et matematisk begreb. Cantor så som den første på talrækken af naturlige tal $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ som repræsenterende en størrelse i sig selv, der kunne tælles, men aldrig kom til en ende. Han kaldte denne størrelse et *transfinit tal*; det klassiske eksempel på et uendeligt *kardinaltal*.

Cantor udviklede kort før 1900 en teori for et nyt talbegreb knyttet til størrelsen af abstrakte mængder. Han kaldte disse nye tal for *kardinaltal*, eller *mægtigheder*. To mængder A og B siges at have den *samme kardinalitet*, eller at repræsentere det *samme kardinaltal*, hvis elementerne i A kan parres entydigt med elementerne i B . Ifølge Cantors definition siges en mængde at være *uendelig*, hvis den har samme kardinalitet som en ægte delmængde af sig selv.

For en endelig mængde, som f.eks. fingrene på en hånd, er det tilhørende kardinaltal et naturligt tal; i tilfældet med fingrene tallet 5. Talrækken af naturlige tal $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ repræsenterer det første kardinaltal større end ethvert naturligt tal. Kardinaltal benævnes ofte ved brug af et gammelt tegn for det første bogstav i det fønikiske alfabet, kaldet *alef* og skrevet \aleph . For talrækken af naturlige tal benævnes det tilhørende kardinaltal med \aleph_0 . Af nærliggende grunde siges \aleph_0 at repræsentere det *tællelige*, idet elementerne i enhver mængde af kardinalitet \aleph_0 kan tilskrives numre.



Man kan regne med kardinaltal. Hvis vi for en vilkårlig mængde A betegner det tilhørende kardinaltal med $|A|$, så kan man definere *summen* og *produktet* af to kardinaltal $|A|$ og $|B|$ for generelle mængder A og B (uden fælles elementer) som kardinaltallet for *foreningsmængden* $A \cup B$, henholdsvis *produktmængden* $A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$, af elementerne i A og B .

På symbolsk form er definitionerne for sum og produkt af vilkårlige kardinaltal givet ved formlerne

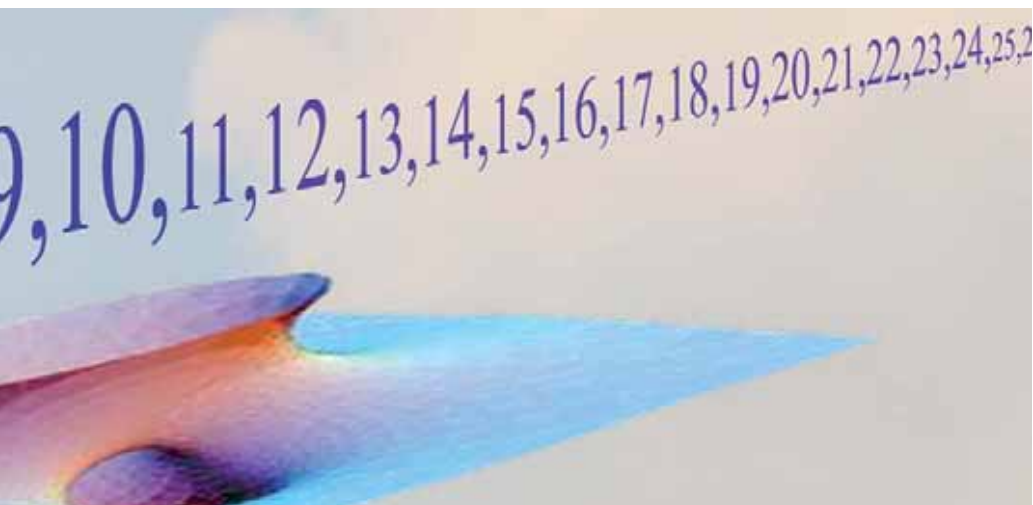
$$|A| + |B| = |A \cup B| \quad \text{og} \quad |A| \cdot |B| = |A \times B| \quad .$$

OPGAVE

Gør rede for, at man for to vilkårlige kardinaltal $|A|$ og $|B|$ altid kan vælge mængder A og B uden fælles elementer, som repræsenterer disse kardinaltal. [Feks. ved at tildele alle elementerne i A et index α og alle elementerne i B et index β .] Hvorfor er dette interessant at vide?

OPGAVE

Bevis, at (1) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, og at (2) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. [Til bevis for (1) kan man benytte, at mængden af naturlige tal er foreningsmængden af de lige og de ulige tal. Til bevis for (2) kan man benytte, at mængden af talpar $\{(n,m) | n, m = 1, 2, 3, \dots\}$ af naturlige tal er tællelig.]





Mere end nogen anden enkeltbegivenhed var det opfindelsen af computeren, der for alvor satte fart i udviklingen af matematikken i det 20. århundrede.

i geometri og topologi, men gav også helt nye forbindelser til andre matematiske emner såsom talteori og også til teoretisk fysik. Atiyah og Singer modtog i året 2004 Abel prisen i matematik for dette arbejde.

Et særligt højdepunkt fra matematikken i det tyvende århundrede er beviset for *Firfarvesætningen*, at fire farver er nok til at farvelægge et landkort, så nabolande har forskellig farve. Igennem mere end ét århundrede var der blevet foreslået mange beviser for sætningen, men alle havde vist sig at være defekte. I 1976 fremlagde Appel og Haken så et bevis, der som noget nyt i matematikken inddrog brugen af computere til rutinetjek af adskillige specielle konfigurationer. Da Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour og Robin Thomas i 1996 fandt en simplere firfarve algoritme, som gav et nyt mere gennemskueligt bevis for Firfarvesætningen, forsvandt den sidste rest af tvivl om sætningens sandhed (i kapitlet "Logik, computere og kunstig intelligens" kan du se, hvordan computeren løser Firfarvesætningen i praksis).

Inden for datalogi er der også foregået et enormt arbejde med at skabe gode algoritmer til implementering på computere, og der er opstået et vigtigt nyt matematisk felt, *diskret matematik*, der omfatter elementer fra områder af ren matematik som kombinatorik og grafteori og relativt nye anvendte matematiske emner som *kodningsteori* og *kryptografi*. Det klassiske matematiske felt talteori har vist sig meget nyttigt i kryptografi.

I begyndelsen af det tyvende århundrede udviklede *teoretisk statistik* sig til et vigtigt selvstændigt område af de matematiske videnskaber gennem arbejder af bl.a. Karl Pearson (1857-1936) og Ronald Fisher (1890-1962), som påpegede, at analyse af data må finde sted inden for en statistisk model. Fisher demonstrerede bl.a. den centrale betydning af variansanalyse i teorien for forsøgsplanlægning.

Matematik for evigt

I det tyvende århundrede steg abstraktionsniveauet i matematik til sådanne højder, at mange matematikere hen imod slutningen af århundredet var bekymrede for, at matematikken skulle miste forbindelsen til sine ofte meget konkrete rødder. Ikke desto mindre har abstraktion i matematik til fulde bevist sin værdi i anvendelser på konkrete problemer fra den virkelige verden, og det matematiske sprog er ved arbejde af store matematikere igennem årtusinder blevet formet til at kunne beskrive og til at få indsigt i konkrete problemer af stadigt voksende kompleksitet. De udviklede abstrakte matematiske begreber og teorier gør det muligt at ræsonnere om vigtige forhold i tilværelsen og at gøre forudsigelser om forhold af betydning for menneskehedens fremtid. Nye generationer af matematikere vil også få brug for at skabe mere matematik og for at udvikle nye overraskende matematiske begreber og teorier til at berige vores fælles fremtidige liv.

Artiklens forfatter



Professor Vagn Lundsgaard



PIRELLA

on
being
mark

Fejlrettende koder

Af Lektor Peter Beelen og Docent Tom Høholdt, DTU Matematik

Introduktion: en model for kommunikation

To personer venter på et tog. Desværre virker stationsuret ikke. Personerne begynder at snakke med hinanden.

“Hvad er klokken?”

“Den er kvart i ti.”

“Det må da være løgn! Hvordan kan den være kvart i to allerede?”

“Nej, den er kvart i ti.”

“Nå, så er der god tid.”

Formålet med et sprog er at kommunikere med andre mennesker. Sagt på en mere abstrakt måde: Hvis en person vil fortælle en anden person noget, så er sproget det værktøj, man bruger. Vores sprog er meget robust til det formål. Hvis nogen f.eks. siger: “Jeg har ondt i mit fod”, vil nok alle forstå personen, selvom han burde have sagt “min fod” i stedet for “mit fod”. Når man kender lidt mere af konteksten, lad os f.eks. sige, at personen var i gang med at spille fodbold og blev sparket på foden, så ville man nok forstå personen, hvis han sagde: “for f..., de. g.r ondt...fod...”. Grunden er, at vi bruger masser af ord i dagligdagen, som man faktisk godt kunne undvære i en samtale. Hvis alt går galt, kan man altid, ligesom i ovenstående samtale på stationen, gentage en sætning.

Hvorfor kan en besked egentlig blive misforstået? En af de mest almindelige årsager er, at der er støj i baggrunden. Det kan selvfølgelig også være, at lyd kvaliteten er dårlig, som man nogle gange oplever, når man lytter til en besked fra en højttaler. Man kan forestille sig, at højttaleren har tilføjet en slags støj til den oprindelige besked. Det kan også ske, at selve budskabet er tydeligt, men at budskabets modtager misforstår det. I det tilfælde kan vi også beskrive situationen, som om modtageren har tilføjet støj til budskabet (antagelig ikke med vilje), selvom det er noget, der foregår i ens ører og hjerne. Fejl i kommunikation optræder altså på grund af støj, hvor ordet støj er brugt meget generelt.

I alt får vi følgende ud af vores analyse af sprogbrug:

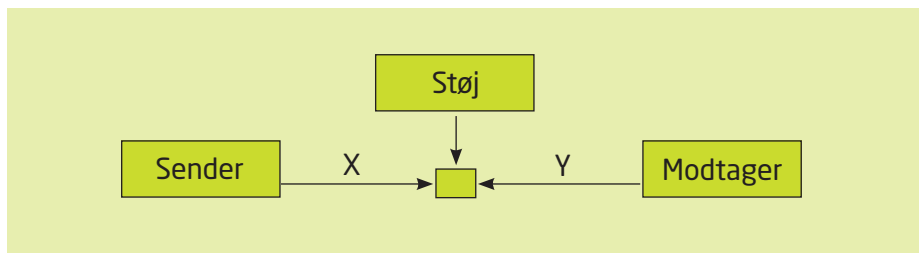
- Fejl i kommunikation skyldes støj, som ændrer den oprindelige besked.
- For at opnå kommunikation på trods af støj kan man tilføje ekstra symboler til beskeden. I det danske sprog (og også i andre sprog) sker det delvis automatisk, men man kan også tilføje ekstra symboler med vilje (f.eks. gentagelse).

Kommunikation sker ikke blot mellem mennesker, men mere generelt også mellem mennesker og maskiner og mellem maskiner indbyrdes. En satellit kan sende en besked

til en modtager på Jorden. Når man taler i en mobiltelefon, sender telefonen en besked til en anden mobiltelefon, som så oversætter den i lyd igen.

Også proceduren, som sker inden i en dvd-afspiller, kan betragtes som en slags kommunikation fra dvd'en til dvd-afspilleren. Støj optræder i det sidste eksempel som snavs eller ridser på dvd'ens overflade.

Figur 1 giver en abstrakt model for kommunikation, som er baseret på en artikel fra 1948 af den amerikanske videnskabsmand Claude E. Shannon. Symbolet X betegner den oprindelige besked, som senderen har sendt, mens Y er den ændrede version, modtageren får.



Figur 1.

Spørgsmålet er nu: Hvordan kan man opnå en pålidelig kommunikation over en kanal med støj? Shannon viste, at det er muligt med brug af såkaldte fejlrettende koder. Vi starter med at give et simpelt eksempel på en kode.

Eksempel 1 (Gentagelseskode) En af de første ting, man kommer i tanker om, når man prøver at konstruere en fejlrettende kode, er at gentage beskeden nogle gange. For eksempel kan man gentage hvert symbol i beskeden tre gange. Så i stedet for at sende "Kvart i ti" sender man "KKKvsvvaaarrttt iii ttiii". Modtager man så "KKKvsvvæarrttt iyi tttoi", så vil man konkludere, at der optrådte tre fejl, nemlig "ææ" burde have været "aaa", "iyi" burde have været "iii", og "toi" burde have været "iii". Det er selvfølgelig også muligt, at senderen faktisk havde sendt "KKKvsvvaaarrttt iii tttoo", og at der optrådte to fejl i den sidste blok "ooo".

Moduloregning

For at være i stand til at beskrive nogle gode fejlrettende koder er vi nødt til at udstyre meddelelserne med en matematisk struktur. Det første, vi gør, er at give hvert symbol i alfabetet en talværdi. Vi vil behandle små og store bogstaver på samme måde. Vi starter med at give A (og derfor også a) værdien 1, B værdi 2 og så videre til bogstavet Å værdien 28. Et mellemrum giver vi værdi 0, et komma får værdi 29 og et punktum værdi 30. Vi har valgt ikke at indføre værdier til spørgsmålstejn, udåbstejn, kolon, cifre osv., men det kunne man godt, hvis man ville. Vi får nu følgende tabel:

symbol		A	B	C	D	E	...	Y	Z	Æ	Ø	Å	,	.
værdi	0	1	2	3	4	5	...	24	25	26	27	28	29	30

Vi kan nu oversætte hver sætning til en række af tal, hvor vi adskiller de enkelte værdier med et mellemrum. Første del af dette afsnit bliver f.eks.

6 15 18 0 1 20 0 22 26 18 5 0 9 0 19 20 1 14 4 0 20 9 12 0 1 20 0 2 5 19 11 18
9 22 5 0 14 15 7 12 5 0 7 15 4 5 0 6 5 10 12 18 5 20 20 5 14 4 5 0 11 15 4 5

Det er klart, at det bliver helt upraktisk at have lange rækker af tal, og derfor deler vi rækken op i blokke af en bestemt længde k , hvor k kan variere mellem 1 og 31. Vi tilføjer også kommaer mellem de enkelte tal. For $k = 8$, bliver ovenstående talrække altså delt op i blokkene:

(6, 15, 18, 0, 1, 20, 0, 22), (26, 18, 5, 0, 9, 0, 19, 20), (1, 14, 4, 0, 20, 9, 12, 0),
(1, 20, 0, 2, 5, 19, 11, 18), (9, 22, 5, 0, 14, 15, 7, 12), (5, 0, 7, 15, 4, 5, 0, 6),
(5, 10, 12, 18, 5, 20, 20, 5) og (14, 4, 5, 0, 11, 15, 4, 5).

En meddelelse kan altså skrives som en række af blokke af en fast længde k , hvor hver blok i sig selv indeholder k tal mellem 0 og 30. Talmængden $\{0, 1, \dots, 30\}$ kan udstyres med mere struktur, vi vil beskrive en addition, en subtraktion, en multiplikation og senere også en division på mængden. Vi definerer først en addition af tal a og b , som begge ligger imellem 0 og 30, og som vi betegner med "+".

$$a \text{ "+" } b := \begin{cases} a + b & \text{hvis } a + b < 31, \\ a + b - 31 & \text{ellers.} \end{cases}$$

For eksempel får vi, at $10 \text{ "+" } 19 = 29$ og $10 \text{ "+" } 29 = 8$. Det vigtige er, at $a \text{ "+" } b$ er altid et heltal mellem 0 og 30 igen. Additionen kan beskrives lidt mere teoretisk.

Givet et heltal t , kan man altid finde heltal q og r , sådan at $t = 31 \cdot q + r$ samt $0 \leq r < 31$. Idéen er simpelthen at tage tallet t og trække 31 nogle gange fra (eller lægge 31 nogle gange til, hvis t er negativt), til man får et tal mellem 0 og 30. Tallet r betegnes med $t \bmod 31$ og udtales som t modulo 31. Vi har f.eks., at $29 \bmod 31 = 29$ og $39 \bmod 31 = 8$. Med den notation gælder altså, at $a \text{ "+" } b = (a+b) \bmod 31$. Vi kan nu også definere en subtraktion "-" og en multiplikation "." på tal a og b mellem 0 og 30, idet vi skriver

$$a \text{ "-" } b := (a - b) \bmod 31.$$

$$a \text{ "." } b := (a \cdot b) \bmod 31.$$

Vi har for eksempel, at $16 \text{ "." } 23 = 27$, fordi $16 \cdot 23 = 368$ og $368 = 31 \cdot 11 + 27$.

Indtil videre har vi ikke brugt nogen specielle egenskaber af tallet 31, og vi kunne have defineret $t \bmod p$ for andre positive heltal p også. Givet t og p , så findes der nemlig heltal q og r sådan, at $t = p \cdot q + r$ og $0 \leq r < p$. Tallet r betegnes med $t \bmod p$, og det udtales som t modulo p . Denne måde at regne med tal på kaldes også for *moduloregning*.

Eksempel 2 (ISBN-nummer) Moduloregning bliver tit brugt i praksis. I dette eksempel vil vi forklare sammenhængen mellem moduloregning og ISBN-numre. Bøger publiceret inden januar 2007 har et ISBN-10 nummer, som består af 9 tal og et symbol, som kan være et tal eller symbolet X. Bøger publiceret efter januar 2007 har et ISBN-13 nummer, som består af 13 tal. ISBN-numre er vigtige for boghandlere og biblioteker, fordi de med brug af ISBN-numre identificerer efterspurgte bøger. Derfor har man indbygget et system i ISBN-numrene, som tjekker, om et ISBN-nummer indeholder en fejl.

Et ISBN-10 nummer består af 9 tal og et såkaldt check-digit, som kan være et tal eller symbolet X, som står for tallet 10 i denne sammenhæng. Eksempler på ISBN-numre er 3 - 03719 - 001 - 9 og 87 - 02 - 04320 - 3.

Bindestegene adskiller grupper af tal, som har deres egen betydning. Første gruppe af tal siger noget om land eller sprog, anden gruppe om udgiver, tredje gruppe om selve bogen, mens den fjerde og sidste gruppe indeholder et check-digit, som vi har angivet i blåt. Givet de første 9 tal af et ISBN-10 nummer, lad os sige x_1, x_2, \dots, x_9 , så er reglen for at udregne det 10. symbol x_{10} i et ISBN-10 nummer følgende:

$$x_{10} = (-10x_1 - 9x_2 - \dots - 3x_8 - 2x_9) \text{ mod } 11,$$

hvor man skal huske at skrive X som check-digit, hvis ovenstående formel giver, at x_{10} skal være 10. Vi har altså, at følgende regel skal være opfyldt for hvert ISBN-10 nummer $x_1 x_2 \dots x_9 x_{10}$:

$$(10x_1 + 9x_2 + \dots + 3x_8 + 2x_9 + x_{10}) \text{ mod } 11 = 0.$$

Det giver en nem måde at tjekke, om et givet ISBN-10 nummer er muligt. Derfor taler man tit i denne sammenhæng om en tjeksum.

ISBN-13 numre blev som sagt indført i januar 2007. Der er igen en nem måde at udregne det 13. symbol ud fra de første 12, fordi der gælder at

$$x_{13} = (-x_1 - 3x_2 - x_3 - 3x_4 - \dots - 3x_{10} - x_{11} - 3x_{12}) \text{ mod } 10,$$

eller sagt på en anden måde

$$(x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + \dots + 3x_{10} + x_{11} + 3x_{12} + x_{13}) \text{ mod } 10 = 0.$$

Lige nu er de første tre tal af et ISBN-13 nummer altid 978 (men senere vil andre muligheder også komme i brug). Indtil videre er det altså nemt at udregne et ISBN-13 nummer for en bog ud fra et ISBN-10 nummer: ISBN-13 nummeret starter med 978, så bruger vi de første 9 tal af ISBN-10 nummeret, og til sidst udregner vi check-digit. De to ISBN-10 numre 3 - 03719 - 001 - 9 og 87 - 02 - 04320 - 3 giver derfor ISBN-13 numrene 978 - 3 - 03719 - 001 - 2 og 978 - 87 - 02 - 04320 - 4. For bøger er ISBN-10 nummeret også det nummer, som står over bogens strekkode, så det er nemt at tjekke ovenstående i eksempler (se figur 2). Ved nye bøger med et ISBN-13 nummer, er det det nummer, der står under strekkoden.



Figur 2.

Vi vender nu tilbage til regning modulo 31. Vi har defineret en addition "+", en subtraktion "-" og en multiplikation "." på mængden af heltal mellem 0 og 30. Vi vil nu indføre division af to tal a "/" b , når man regner modulo 31, hvor $b \neq 0$.

Det er nok at se, at ethvert heltal mellem 1 og 30 kan inverteres, dvs. givet et heltal b mellem 1 og 30 kan man finde et heltal c mellem 1 og 30, sådan at $b \cdot c = 1$. Tallet c betegnes som b^{-1} mod 31. En brøk a "/" b kan nu udregnes som følgende: a "/" $b = a \cdot c$ (b^{-1} mod

31). Ligesom med almindelige tal kan man ikke dele med 0. Det er ikke svært at finde inverse modulo 31, man kan blot afprøve alle tallene fra 1 til 30. Man får f.eks. at $7^{-1} \text{ mod } 31 = 9$. Derfor gælder også, at $17 \cdot 7 = 17 \cdot 9 = 29$.

Mere almindeligt kan man vise, at hvis p er et primtal, så findes der for hvert heltal a mellem 1 og $p - 1$ en invers modulo p . Hvis tallet p ikke er et primtal, så er dette ikke altid tilfældet.

Reed-Solomon koder

De koder, vi har set på i det foregående afsnit, kan opdage fejl, men ikke rette dem. I det følgende vil vi præsentere et eksempel fra en stor klasse af koder, de såkaldte Reed-Solomon koder, der er i stand til at rette (mange) fejl. Disse koder anvendes i cd- og dvd-afspillere, ved satellitkommunikation og ved lagring af data. Vi kan ikke på dette sted gennemgå de koder, der faktisk anvendes i praksis, men vi vil illustrere principperne udførligt i et mere gennemskueligt eksempel.



Efterfølgeren af strekkoden er den såkaldte datamatrix. Vi har set, at en strekkode kun kan opdage fejl. En datamatrix bruger derimod Reed-Solomon koder, så nogle fejl også kan rettes.

Vi har set, at man i mængden af heltal mellem 0 og 30 kan indføre addition "+", subtraktion "-", multiplikation "·" og division "/" , således at man får en struktur, hvor man kan regne næsten som med de rationelle tal, vi kalder denne for F_{31} .

Fra nu af bruger vi +, -, · og / uden anførselstegn, men vi husker altså, at vi regner modulo 31.

Vi vil nu forklare, hvordan man til 8 symboler $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_7)$ fra F_{31} kan tilføje 4 ekstra symboler a_8, a_9, a_{10}, a_{11} , således at man kan benytte den resulterende kode til at rette 2 fejl.

De 4 ekstra symboler skal vælges på en sådan måde, at der gælder:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{11} &= 0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 11a_{11} &= 0 \\ a_1 + 2^2a_2 + 3^2a_3 + \dots + 11^2a_{11} &= 0 \\ a_1 + 2^3a_2 + 3^3a_3 + \dots + 11^3a_{11} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Når man løser ligningerne, får man, at

$$\begin{aligned} a_8 &= 21a_0 + 4a_1 + 9a_2 + 6a_3 + 27a_4 + 11a_5 + 21a_6 + 27a_7 \\ a_9 &= 6a_0 + 5a_1 + 30a_2 + 16a_3 + 22a_4 + 14a_5 + 20a_6 + 6a_7 \\ a_{10} &= 7a_0 + 30a_1 + 28a_2 + 4a_3 + 23a_4 + 26a_5 + 16a_6 + 27a_7 \\ a_{11} &= 27a_0 + 22a_1 + 25a_2 + 4a_3 + 20a_4 + 10a_5 + 4a_6 + a_7 \end{aligned}$$



Kilde: NASA, ESA, and the Hubble Heritage Team (STScI/AURA)-ESA/Hubble Collaboration. Dette billede af Antennae galakserne blev taget af Hubble teleskopet. Der blev brugt Reed-Solomon koder for at sende billedet til jordoverfladen.

Dette kan måske virke en lille smule tilfældigt, men som vi skal se, er det præcis strukturen i ligningssystemet (1), som gør, at det er nemt at rette to fejl. Det vil vi nu illustrere:

Lad os antage, at der er sket to fejl på pladserne i og j med fejlværdierne e_i og e_j , det betyder, at vi modtager $(r_0, r_1, r_2, \dots, r_{11})$, hvor

$$r_s = a_s \text{ hvis } s \neq i, j$$

$$r_i = a_i + e_i$$

$$r_j = a_j + e_j$$

Nu udregner vi så

$$s_0 = r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_{11}$$

$$s_1 = r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \dots + 11r_{11}$$

$$s_2 = r_1 + 2^2r_2 + 3^2r_3 + \dots + 11^2r_{11}$$

$$s_3 = r_1 + 2^3r_2 + 3^3r_3 + \dots + 11^3r_{11}$$

og da $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{11})$ opfylder ligningssystemet (1), får vi så:

$$s_0 = e_i + e_j \tag{2}$$

$$s_1 = i e_i + j e_j \tag{3}$$

$$s_2 = i^2 e_i + j^2 e_j \tag{4}$$

$$s_3 = i^3 e_i + j^3 e_j \tag{5}$$

Pointen er her, at s_0, s_1, s_2 og s_3 kan beregnes direkte ud fra de modtagne symboler r_0, \dots, r_{11} , mens de størrelser, vi skal finde, er i, j, e_i og e_j .

Vi får

$$\begin{aligned} is_0 &= ie_i + ie_j \quad \text{og derfor er} \\ s_1 - is_0 &= (j - i)e_j \end{aligned}$$

På tilsvarende måde

$$\begin{aligned} is_1 &= i^2e_i + ije_j \quad \text{og derfor} \\ s_2 - is_1 &= j(j - i)e_j = j(s_1 - is_0) \end{aligned}$$

og endelig

$$\begin{aligned} is_2 &= i^3e_i + ij^2e_j \quad \text{så} \\ s_3 - is_2 &= j^2(j - i)e_j = j^2(s_1 - is_0) \end{aligned}$$

Heraf fås så

$$j = \frac{(s_2 - is_1)}{(s_1 - is_0)} \quad \text{og} \tag{6}$$

$$j^2 = \frac{(s_3 - is_2)}{(s_1 - is_0)}$$

så derfor gælder:

$$\frac{(s_2 - is_1)^2}{(s_1 - is_0)^2} = \frac{(s_3 - is_2)}{(s_1 - is_0)}$$

som giver

$$(s_2 - is_1)^2 = (s_1 - is_0)(s_3 - is_2)$$

som endelig resulterer i

$$i^2(s_1^2 - s_0s_2) + i(s_0s_3 - s_1s_2) + s_2^2 - s_1s_3 = 0 \tag{7}$$

(Der skal selvfølgelig gælde, at $s_1 - is_0 \neq 0$, for at (6) giver mening, men det gælder, fordi i og j er forskellige. Af samme grund kan man indse, at $s_1^2 - s_0s_2 \neq 0$).

Ligningen (7) er en andengradsligning til bestemmelse af i . Den kan løses f.eks. ved at prøve alle de 12 muligheder. Det viser sig, at den anden løsning til (7) er j .

Når først i og j er bestemt, er det nemt at finde e_i og e_j ud fra ligningerne (2) og (3).

Analysen ovenfor er gennemført under den forudsætning, at der er præcis to fejl. Hvis der kun er en fejl, er situationen meget simplere. De fire udtryk (2),(3),(4),(5) bliver i stedet $s_0 = e_p, s_1 = ie_p, s_2 = i^2e_i$ og $s_3 = i^3e_p$, så $i = s_1/s_0 = s_3/s_2$. Det nemmeste tilfælde er, hvis der ikke er fejl. Det optræder, hvis og kun hvis $s_0 = s_1 = s_2 = s_3 = 0$.

Vi får så følgende algoritme:

INPUT: Et modtaget ord $(r_0, r_1, \dots, r_{11})$

Udregn:

$$\begin{aligned} s_0 &= r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_{11} \\ s_1 &= r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \dots + 11r_{11} \\ s_2 &= r_1 + 2^2r_2 + 3^2r_3 + \dots + 11^2r_{11} \\ s_3 &= r_1 + 2^3r_2 + 3^3r_3 + \dots + 11^3r_{11} \end{aligned}$$

if $s_0 = s_1 = s_2 = s_3 = 0$ **then**

OUTPUT: $(r_0, r_1, \dots, r_{11})$

else

if $s_1^2 - s_0s_2 = s_0s_3 - s_1s_2 = s_2^2 - s_1s_3 = 0$ **then**

if $s_0 = 0$ **then**

OUTPUT: for mange fejl

else

sæt $i = s_1/s_0, e_i = s_0,$

OUTPUT: $(r_0, r_1, \dots, r_{11}) - (0, \dots, 0, \overset{i}{\downarrow} e_p, 0, \dots, 0)$

end if

else

if $s_1^2 - s_0s_2 = 0$ **then**

OUTPUT: for mange fejl

else

Betragt andengradsligningen

$$X^2(s_1^2 - s_0s_2) + X(s_0s_3 - s_1s_2) + s_2^2 - s_1s_3 = 0$$

if Ligningen har to forskellige løsninger i og j mellem 0 og 11

then

$$\text{sæt } e_i = (js_0 - s_1)/(j - i), e_j = (s_1 - is_0)/(j - i)$$

OUTPUT: $(r_0, r_1, \dots, r_{11}) - (0, \dots, 0, \overset{i}{\downarrow} e_p, \dots, \overset{j}{\downarrow} e_p, 0, \dots, 0)$

else

OUTPUT: for mange fejl

end if

end if

end if

end if

Det kræver selvfølgelig en overvejelse at indse, at algoritmen er korrekt, og at alle mulige tilfælde er dækket, men sådan er det nu!

Her er et eksempel (husk, at vi altid regner modulo 31):

Vi modtager $(11, 26, 4, 5, 19, 10, 15, 11, 29, 29, 20, 7)$, så fås

$$\begin{aligned} s_0 &= 0 & s_2 &= 30 \\ s_1 &= 27 & s_3 &= 20 \end{aligned}$$

$$s_1^2 - s_0s_2 = 27^2 - 0 \cdot 30 = 16 \neq 0$$

$$s_0s_3 - s_1s_2 = 0 \cdot 20 - 27 \cdot 30 = 27$$

$$s_2^2 - s_1s_3 = 30^2 - 27 \cdot 20 = 19$$

Nu antager vi, at modtageren fik følgende "ridse" version (fejl er angivet med rødt, men modtageren ved selvfølgelig ikke, hvor fejlene er!):

0	10	4	4	2	17	5	8	20	28	27	30
2	18	5	0	9	0	19	20	1	9	22	11
1	1	4	0	20	9	12	0	4	10	30	12
1	20	14	2	5	19	11	18	10	5	26	21
9	22	5	21	14	15	7	12	7	21	27	3
5	0	7	15	11	5	0	6	21	23	21	10
5	10	12	18	5	16	20	5	9	7	4	27
14	4	5	0	11	15	12	5	29	10	22	21
3	26	10	28	6	9	6	20	4	26	13	18
13	16	18	13	21	3	27	6	1	20	21	18
6	0	20	4	17	25	20	16	11	29	24	0
4	10	20	13	11	15	25	5	15	4	10	22

Vi starter med at rette fejl i hver række ved hjælp af vores algoritme. Det betyder, at hvis der er op til to fejl i en række, så kan vi rette dem. Hvis der er flere fejl, som f.eks. i rækkerne 1, 5, 6 og 7, så kan vi ikke rette dem, og så lader vi den oprindelige række stå.

Efter vi har gjort det for alle 12 rækker, får vi følgende output:

0	10	4	4	2	17	5	8	20	28	27	30
26	18	5	0	9	0	19	20	16	9	22	11
1	14	4	0	20	9	12	0	12	10	30	12
1	20	0	2	5	19	11	18	27	5	26	21
9	22	5	21	14	15	7	12	7	21	27	3
5	0	7	15	11	5	0	6	21	23	21	10
5	10	12	18	5	16	20	5	9	7	4	27
14	4	5	0	11	15	4	5	13	10	22	21
3	26	10	28	6	9	6	9	1	26	13	18
13	16	18	13	21	3	0	6	6	20	21	18
6	0	20	4	17	25	20	16	25	29	24	0
4	10	20	13	11	15	25	5	16	4	10	22

Vi har nu allerede rettet 14 fejl. Vi kan ikke bruge vores afkodningsalgoritme på rækkerne igen, men vi starter nu med at rette fejl i søjlerne, hvor vi jo kan bruge den samme algoritme.

Efter vi har kørt algoritmen på alle søjler, får vi som output:

6	15	18	0	1	20	0	22	20	0	25	6
26	18	5	0	9	0	19	20	16	9	22	11
1	14	4	0	20	9	12	0	12	10	30	12
1	20	0	2	5	19	11	18	27	5	26	21
9	22	5	0	14	15	7	12	7	21	27	20
5	0	7	15	4	5	0	6	21	23	24	10
5	10	12	18	5	20	20	5	9	29	4	27
14	4	5	0	11	15	4	5	13	10	22	21
3	26	10	28	6	9	6	9	1	26	13	18
13	16	18	13	21	3	0	6	6	20	21	18
6	0	20	4	17	25	20	16	25	29	24	0
4	10	20	13	11	15	25	5	16	4	10	22

Vi har rettet atter 17 fejl. Hvis vi nu kører vores algoritme på rækkerne igen, vil vi kunne rette de sidste 4 fejl.

Det rigtige dvd-system arbejder med et alfabet på 256 symboler (i stedet for 31 symboler, som vi har gjort nu), og man benytter en rækkekode med 172 informationssymboler og 10 ekstra symboler, som kan rette 5 fejl, og en søjlekode med 192 informations-symboler og 16 ekstra symboler, som kan rette 8 fejl. Man kan finde en illustration på fejlretning på følgende website:

<http://www.mat.dtu.dk/people/T.Hoeholdt/DVD/>

Artiklens forfattere



Lektor Peter Beelen



Docent Tom Høholdt



Øl og fladskærme

- statistik i aktion



Mennesker bruges som måleinstrumenter til at kontrollere kvalitet og udvikle nye produkter. I vidt forskellige virksomheder som Carlsberg og Bang & Olufsen hjælper vores sensoriske sanser (smag, lugt, følelse, syn) med til at træffe afgørende beslutninger om, hvordan fremtidens tv-apparater skal se ud, og hvordan næste generations øl skal smage.

Forskningsfeltet sensorik handler om mennesket som måleinstrument, og inden for sensorik er statistik og matematiske modeller for hjernens beslutningsproces et meget centralt element. I dette kapitel introduceres de helt grundlæggende begreber i statistik, som indgår på næsten alle ingeniørfaglige, naturvidenskabelige eller samfundsvidenskabelig/økonomiske uddannelser. Det beskrives samtidigt, hvordan statistik er med i enhver form for empirisk baseret information og dagligt fører til afgørelser i såvel industri som i forskningsverdenen.

Statistik ved hjælp af hypotesetest

En af de mest almindelige sensoriske test er den såkaldte triangel-test. Smageren eller bedømmeren får præsenteret 3 prøver samtidigt, hvoraf 2 af disse er ens, mens den sidste adskiller sig. Det kunne eksempelvis være to glas med Carlsberg Pilsner og et enkelt med Tuborg Pilsner. Uden at vide noget om baggrunden for smagningen, eller naturligvis hvilket glas der er hvilket, bliver smageren bedt om at udpege den afvigende prøve. Den testansvarlige vil så registrere, om smageren gør det korrekt eller ej. Man lader eksempelvis 12 personer gennemføre testen og tæller dernæst, hvor mange ud af de 12 der svarer korrekt. Det samlede resultat er på mellem 0 og 12 korrekte svar. Et af formålene med øvelsen er at opklare, om man i det hele taget kan smage forskel på øllene, eller anderledes formuleret: Er den forskel, der vitterlig er, registrerbar for mennesker? En virksomhed kan naturligvis ikke udføre smagstesten på alle mennesker i hele verden, inden man kan tage en beslutning. De 12 personer udgør her en såkaldt *tilfældig stikprøve*, der skal repræsentere "mennesker" i denne sammenhæng og hjælpe virksomheden med at træffe en fornuftig afgørelse.

Der er to mulige beslutninger at tage:

- (1) De to slags øl opfattes ens
- (2) De to slags øl opfattes forskellige

Sammenholdt med de samme to muligheder for virkeligheden om øllene giver det følgende tabel af mulige scenarier:

	Beslutning: Produkter opfattes ens (H0 er sand)	Beslutning: Produkter opfattes forskellige (Ha er sand)
Virkeligheden: Produkter opfattes ens (H0 er sand)	Korrekt beslutning	Forkert beslutning (af type 1)
Virkeligheden: Produkter opfattes forskellige (Ha er sand)	Forkert beslutning (af type 2)	Korrekt beslutning

Statistik går ud på at tage en beslutning om virkeligheden baseret på de givne data, der kun giver en begrænset indsigt i samme virkelighed – i dette tilfælde hvor mange korrekte svar der registreres ud af de 12 mulige. Hvis man ser 12 korrekte svar ud af de 12, så vil de fleste nok beslutte sig for, at produkterne opfattes forskellige. Ser man i stedet 12 forkerte svar, vil beslutningen uden tvivl være, at produkterne er ens. Men hvad ville du beslutte med f.eks. 8 korrekte svar ud af 12, eller hvad med 6? Og hvad er egentlig baggrunden for at lade 12 ud af 12 mulige korrekte svar lede til beslutningen, at produkterne opfattes forskellige?

Mange vil utvivlsomt tænke: “12 ud af 12 korrekte svar er simpelt hen for usandsynligt, hvis ikke produkterne virkelig adskiller sig meget fra hinanden”. Eller tilsvarende: “Hvis produkterne vitterlig er ens, vil jeg forvente, at man gætter rigtigt i 1/3-del af gangene, så der burde i så fald være omkring $12/3 = 4$ korrekte svar – i det lys er 12 ud af 12 korrekte svar usandsynlig mange – altså må produkterne være forskellige”.



I særlige forsøgsrum kan forskere både undersøge, hvordan smagere vurderer forskellige produkter, samt de enkelte testpersoners evne til at give “korrekte” svar. (Foto: Thomas Hjort Jensen)

Hvis du selv har tænkt noget lignende, så har du udført din første såkaldte *statistiske hypotesetest!* Og du har faktisk brugt *sandsynlighedsregning* i din overvejelse. Det afgørende for vores beslutning er åbenbart, hvor (u)sandsynlig vores faktiske hændelse (f.eks. 12 ud 12) egentlig ville være, såfremt hypotesen om produktlighed er gældende. Betegnelsen hypotese bruges til at inddele vikeligheden i to mulige scenarier. Man kalder den ene for nul-hypotesen (H_0) og den anden for alternativ-hypotesen (H_a). Man kan i princippet vende hypoteserne begge veje, afhængig af hvilken form for dokumentation man gerne vil gennemføre, men det mest almindelige i denne sammenhæng vil være at sige:

Nul-hypotesen, H_0 : Produkterne opfattes ens
 Alternativ-hypotesen, H_a : Produkterne opfattes forskellige

Sådanne sandsynligheder kan beregnes ved hjælp af den såkaldte binomialfordeling – eller om man vil: matematikken bag plat-og-krone-kast (se boks).

Binomialfordelingen

Med binomialfordelingen kan man beregne sandsynligheden for netop k plat-udfald ud af n tilfældige kast med en mønt:

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

I denne formel betegner p sandsynligheden for plat i det enkelte kast, og vi lader dermed muligheden stå åben, at andre end fifty-fifty situationer kan forekomme. En asymmetrisk mønt kunne have 75 % chance ($p = 0.75$) for at komme op med et plat-udfald. Vores chance for at gætte det korrekte svar i en triangel-test, hvor vi ikke kan finde forskel mellem produkterne, vil være $p = 1/3$. Udråbstegnene betegner den såkaldte fakultetsfunktion, hvor f.eks. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Med lidt kombinatoriske overvejelser er det ikke så svært at forstå, hvorfor denne formel giver god mening, men det må du selv tænke over!

Figur 1. Binomialfordelings-sandsynlighedsfordelinger ($n = 12$). Til venstre: Ingen produktforskel ($p = 1/3$). Til højre: med produktforskel ($p = 2/3$). F.eks. er sandsynligheden for at få 5 rigtige 0,05 (med produktforskel).

OPGAVE



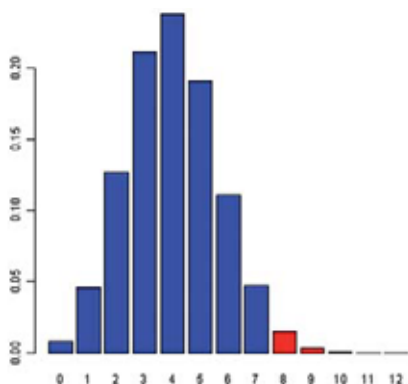
Hvad er chancen for at se netop 4 korrekte svar i 12 triangel-test uden produktforskel?

Beregning af P-værdi

Som udgangspunkt for beslutningen vurderes præcist, hvor sandsynlig det givne udfald er i lyset af nulhypotesen. Lad os sige, at vi i et forsøg med 12 forsøgspersoner observerer 8 korrekte svar (ud af de 12 mulige). Den omtalte sandsynlighed, i daglig tale P-værdien, kan så beregnes vha. binomialformlen:

$$\begin{aligned} \text{P-værdi} &= P(\text{Observere 8 eller flere selvom ingen forskel}) \\ &= P(X \geq 8) \\ &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) \\ &= 0,0188 \end{aligned}$$

Eller arealet af de røde søjler i figur 2 over sandsynlighederne for de 12 forskellige mulige udfald, når der vitterlig ingen forskel er. Da 1,9 % er et ret lille tal, er der altså kun en lille chance for at opnå 8 eller flere korrekte svar, når produkterne er ens, så derfor vil man konkludere, at der altså må være en reel forskel på produkterne.



Figur 2.

Signifikansniveau, type 1 og type 2 fejl

Hvis de observerede data, i ovenstående tilfælde 8 korrekte svar ud af 12 mulige, ser usandsynlige ud – målt ved den såkaldte P-værdi – med udgangspunkt i scenariet, at der ingen forskel er, så vil vi tage beslutningen at forkaste nulhypotesen. Hvis ikke, må vi “acceptere” den. Man sætter normalt en ret lav grænse for denne sandsynlighed – som regel 5 %. Denne på forhånd fastlagte beslutningsgrænse fortæller samtidigt, hvad risikoen er for at begå en såkaldt type 1 fejl: Fejlagtigt påstå, at produkterne er forskellige.

Med sjældne mellemrum vil der ved ren tilfældighed optræde “underlige/ekstreme” udfald, der så leder til en forkert beslutning. Det er lidt sværere både at forstå og beregne den ikke mindre væsentlige type 2 fejl: fejlagtigt at acceptere forskellige produkter som værende ens. Dette er en fejl, som en marketingsafdeling helst vil undgå, da det kan betyde, at man sender et veletableret produkt (f.eks. en øl) ud på markedet med en anden smag, end den plejer. Sådanne beslutninger kan forvolde stor skade på salget i en lang periode. Man kan dog ligeledes ved hjælp af binomialfordelingen beregne risikoen for at begå en type 2 fejl under forskellige scenarier for virkeligheden.

Statistik ved hjælp af konfidensintervaller

Konfidensintervaller (sikkerhedsintervaller) er et andet centralt statistisk redskab, der fokuserer mere på at viderefortælle den information, der er i et sæt data, end på det lidt firkantede ja/nej-beslutningssetup beskrevet ovenfor. Laver man eksempelvis en forbrugerundersøgelse og finder, at 268 ud af 400 adspurgte foretrækker en nyudviklet øl frem for en traditionel pilsner, så er selve tallet $268/400 = 0,67$ det mest interessante for virksomheden. Dette tal fortæller en historie om den forbrugerpopulation, som man har undersøgt: Omtrent $2/3$ af forbrugerne foretrækker den nye øl. Ordet omtrent antyder statistikkens rolle her, nemlig at finde ud af, hvor tæt på sandheden de $2/3$ faktisk er.

Alle er på det rene med, at man ikke opnår den ultimative sandhed om de danske forbrugere ved blot at undersøge 400 af dem. Konfidensintervallet giver et interval, omkring i dette tilfælde de $2/3$, inden for hvilket vi mener at have den sande brøkdel af forbrugere, der foretrækker den nye øl. Bredden af dette interval afhænger af, hvor sikre vi vil være i vores sag – jo mere sikker vi ønsker at være, jo bredere er intervallet. Et ofte anvendt niveau er 95 %. Et 95 % konfidensinterval for sådan en brøkdel kan beregnes ved hjælp af binomialfordelingen eller, som ofte beskrevet i grundlæggende statistikbøger, ved følgende formel:

$$p \pm 1,96 \cdot \sqrt{p(1-p)/n}$$

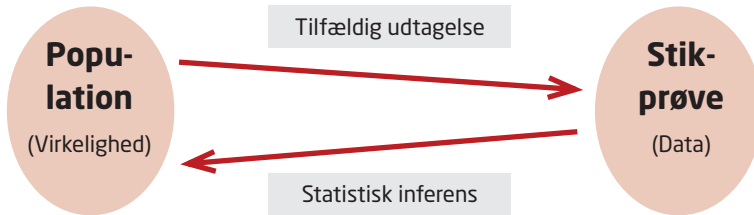
som i dette tilfælde giver:

$$0,67 \pm 1,96 \cdot \sqrt{0,67 \cdot 0,33/400} \text{ svarende til } 0,67 \pm 0,046$$

Med en undersøgelse af blot 400 forbrugere vil man altså være nogenlunde overbevist om, at mellem 62 % og 72 % af alle forbrugere foretrækker den nye øl. Denne formel, og specielt tallet 1,96, baserer sig faktisk på den såkaldte normalfordeling – nok den mest centrale og velkendte af alle fordelinger inden for statistikken (se herunder). Tilsvarende betragtninger bruges, når Gallup og andre analyseinstitutter bestemmer sig for, hvor mange mennesker der skal spørges i politiske meningsmålinger. Prøv selv at beregne, hvor præcist man kender den procentdel, der stemmer på et givent parti ved en meningsmåling gennemført med f.eks. 1.200 personer?

Statistisk inferens

Konfidensintervaller og hypotesetest kan med en fællesbetegnelse kaldes “statistisk inferens”. I begge tilfælde bruger man den begrænsede *tilfældige stikprøve* til at sige noget om (“inferere vedrørende”) en større virkelighed/population:



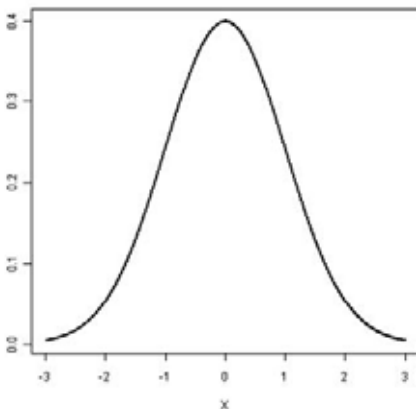
Et vigtigt aspekt for gyldigheden og fornuftigheden af dette er selve processen bag dataindsamlingen. Et grundlæggende fornuftigt princip er den helt tilfældige udtagelse – det kan dog være nemmere at skrive end at udføre i praksis – og mere komplicerede udvidelser af tilfældighedsprincippet kan være nødvendige at tage i brug.

Normalfordelingen/central grænseværdisætning

Normalfordelingen er på den ene side simpelt hen en relativt “simpel” matematisk funktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) ,$$

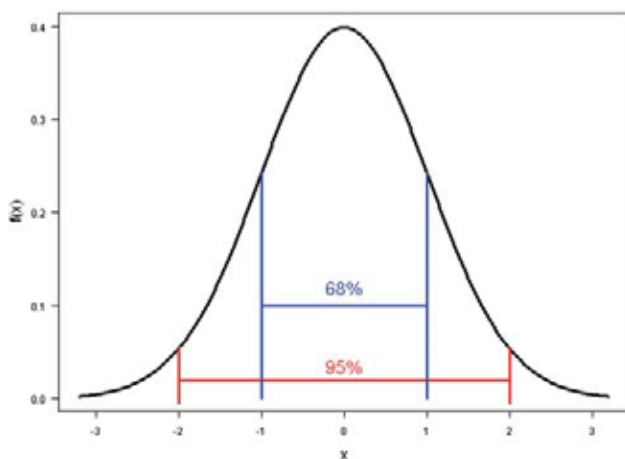
eller i hvert fald simpel, hvis man ved, hvad konstanten π (pi) er og har hørt om både kvadratiske funktioner (2.grads funktioner) og eksponentialfunktionen – den inverse logaritmefunktion. Tegner man denne funktion, ligner den en klokkeformet kurve (figur 3), der er symmetrisk omkring 0 og aldrig bliver mindre end nul, men på den anden side af hhv. -3 og 3 i praksis stort set er nul:



Figur 3. Normalfordelingsfigur.

Og hvad har denne funktion så med statistik at gøre? På den ene side kan funktionen bruges til at beskrive fænomener fra dagligdagen, der har et tilfældighedsaspekt, f.eks. din egen vægt. Hvis du gentagne gange hen over en dag og hen over flere dage stiller dig på vægten med den påklædning og de sko, du tilfældigvis har på, så vil vægten ikke vise det samme hver gang, og det endda selvom du gør det i en periode, hvor du egentlig ikke hverken taber dig eller tager på. Lad os antage, at din egentlige middelvægt hen over alle disse vægtmålinger er 65 kg. I funktionen/figuren svarer 0 så til 65, og formen af funktionen/figuren kunne så beskrive, hvor ofte du måler hhv. over eller under 65 kg. Da bredden af kurven bestemmer disse tal, får man brug for tilsvarende kurver af forskellige bredder for at lave en passende beskrivelse for forskellige personer, der kan variere forskelligt. Disse findes, men vil ikke blive beskrevet nærmere her. Hvis du passer med figuren her, kan man f.eks. aflæse:

1. halvdelen af gangene vejer du over 5 og halvdelen under (symmetrien)
2. stort set aldrig vejer du under 62 eller over 68 kg (-3 og +3)
3. ca. 95 % af gangene vejer du mellem 63 og 67 kg (-2 og +2)
4. ca. 68 % af gangene vejer du mellem 64 og 66 kg (-1 og +1)



Figur 4. Sandsynlighedsfunktion for afvigelser fra middelvægt på 65 kg.

Punkt 1 og 2 kan alle se med det blotte øje, men procenterne angivet i 3 og 4 er ikke så oplagte at aflæse. De udgør det tilsvarende areal under kurven, der faktisk har et samlet areal på netop 1. På denne vis bliver kurven, den matematisk funktion, til en fornuftig sandsynlighedsfunktion/model, idet sandsynligheder jo altid ligger mellem 0 og 1, og arealer under netop denne kurve kan kun være mellem 0 og 1.

At dette overhovedet har nogen interesse skyldes to ting:

1. Sådanne tilfældige systemer/fænomener findes overalt i den virkelige verden – både i dagligdagen som i industrien og forskningsverdenen.
2. Selv tilfældige fænomener, som i sin grundform ikke lever op til denne ideelle funktions fine former, vil, hvis man undersøger fænomenet tilpas grundigt, have centrale afledte elementer, der alligevel opfører sig som denne normalfordeling.

Således kan denne simple matematiske funktion faktisk bruges til at lave hypotese-test og konfidensintervaller, altså statistisk inferens, for rigtig mange forskellige tilfældighedsfænomener. Pkt. 2 udtrykker det, der også kaldes den centrale grænseværdisætning: En beregnet størrelse, som f.eks. et gennemsnit eller en brøkdelt, som ovenfor vil variere omkring den sande værdi som en normalfordeling, såfremt der indgår tilstrækkelig med information i beregningen. Vi så f.eks., hvordan man brugte en formel baseret på normalfordelingen til at finde et konfidensinterval for en brøkdelt, selvom det grundlæggende plat-og-krone fænomen jo bedst lod sig beskrive/modellere med binomialfordelingen. Betragter man formen af binomialfordelingsplotsene, kan man også se, at de faktisk minder en del om en normalfordelingskurve.

Normalfordelingsstatistik

Ofte introduceres statistikken som et redskab til at forholde sig til observationer af den samme størrelse, f.eks. blodtrykket for en række individer, karaktergennemsnittet for en række skoler, billedkvaliteten for en række målinger af en bestemt kombination af billed- og fladskærmstype, sukkerindholdet eller den vurderede bitterhedsintensitet i en række ølprøver osv. I hvert tilfælde svarende til en enkelt kolonne/søjle i et regneark.

Den typiske beregningsstørrelse er her gennemsnittet, ofte det tal man er interesseret i, som det bedst mulige bud på den sande (men ukendte) middelværdi, der ville være, hvis man kunne observere uendelig mange (hele populationen). Statistikkens rolle er at bidrage til at overveje, om det overhovedet giver mening at lave statistisk inferens i en given situation: Repræsenterer de givne data på nogen meningsfuld måde en større virkelighed (population), eller taler de kun for sig selv? Uanset hvad kan man sådan set godt beregne de sædvanlige nøgletal i sådanne tilfælde:

1. Gennemsnit:
$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

2. Spredning:
$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}((x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2)}$$

hvor x_1, \dots, x_n angiver f.eks. blodtrykkene for n personer.

Disse to nøgletal fortæller "historien" om datamaterialet: Den gennemsnitlige størrelse for tallene og, måske lidt mindre tydeligt, den gennemsnitlige forskellighed i materialet. For vægteksempel i boksen svarende til normalkurven er spredningen netop 1 – den målte vægt vil i dette tilfælde i gennemsnit være omtrent 1 kg forskellig fra din middelvægt på 65 kg. Hvis den statistiske inferens er meningsfuld, vil disse størrelser være gode skøn over de tilsvarende sande værdier i den population/virkelighed, som stikprøven/data repræsenterer.

Et eksempel på statistisk inferens er et 95 % konfidensinterval for middelniveauet i populationen:

$$\bar{x} \pm 1,96 \frac{s}{\sqrt{n}} ,$$

der dog i denne variant kun er helt korrekt under visse ekstra betingelser, vi ikke skal komme ind på her. Man ser her meget direkte, hvorledes spredningen i data naturligvis påvirker præcisionen i skønnet af middelniveauet, men også hvorledes man ved at øge antallet af observationer kan opnå en så høj præcision, som man nu engang ønsker og har råd til. Tilsvarende kan man i en industriel produktion være interesseret i spredningen i data – de producerede piller på en medicinalvarefabrik skal ikke bare i gennemsnit indeholde den påståede mængde medicin, men spredningen i indholdet skal være passende lille, og dette skal kunne dokumenteres over for de godkendende myndigheder. Dermed må man lave tilsvarende statistiske analyser, konfidensintervaller og hypotesetest for spredningen af data.

Videre vil man ofte i både den industrielle udviklingsproces som i videnskabelige undersøgelser sammenligne to eller flere alternative situationer/behandlinger med hinanden for at finde den bedste. Man kunne også være interesseret i at kunne finde og måle den præcise måde, hvorpå et medikament (eller f.eks. alkohol) bliver udskilt af kroppen som funktion af tiden og af mængden af stof, der bliver tilført. Sådanne mere komplicerede setups kræver således udvidelser af ovenstående metoder, men de grundlæggende idéer i konfidensintervallet og hypotesetest forbliver de samme.

Normalfordeling som psykofysisk model for hjernens beslutningsproces

Hvor de ovenstående emner typisk er en del af et indledende statistikkursus, så omhandler dette afsnit et mere forskningsnært emne relateret til brugen af mennesker som måleinstrumenter og specifikt triangeltesten beskrevet ovenfor.

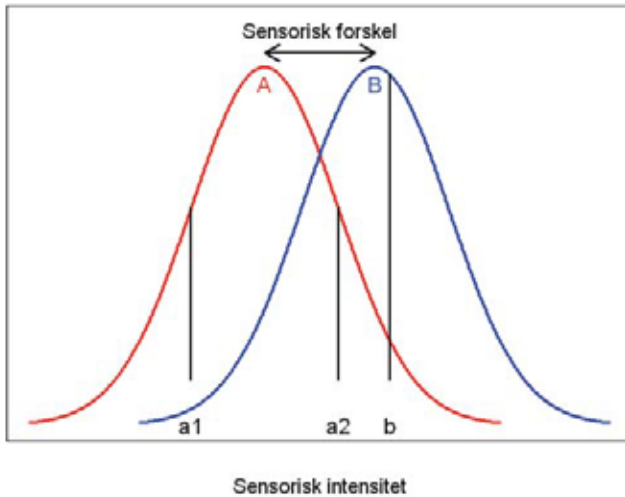
En virksomhed som Bang & Olufsen udvikler ikke produkter uden at benytte mennesker som måleinstrumenter af lyd- og billedkvalitet. En ting er fysiske målinger på et tv-apparat, eller kemiske målinger af et ølprodukt, noget helt andet er hvorledes den menneskelige opfattelse (perception) er af disse produkter. Dette har skabt et spændende krydsfelt mellem på den ene side f.eks. ingeniører og/eller fødevarereksperter, som har produktviden, og på den anden eksperimentelle psykologer, som har viden om instrumentet, nemlig mennesket selv. I dette krydsfelt bruges og udvikles matematiske og statistiske modeller. Et eksempel på dette er følgende model for, hvorledes hjernen faktisk håndterer den tidligere nævnte triangeltesten og producerer et svar: Man forestiller sig, at hvis to stimuli (produkter) ikke er helt tydeligt forskellige, men altså i nærheden af hinanden, så vil svaret nogen gange falde til den ene side og nogen gange til den anden. Variationen kan stamme fra flere forskellige kilder. Dels kan selve produkterne jo være en smule forskellige fra gang til gang, selvom det egentlig er samme produkt, og dels er der forskel på, hvordan vi indtager produktet, hvor mange kemiske smagsstoffer vores smagsløg opfanger fra gang til gang, hvorledes vores hjerne vælger at opfatte de signaler, som vores smagsløg genererer. På samme måde vil hukommelse fra tidligere smagninger, humør og koncentration påvirke de enkelte svar.

En klassisk model er at beskrive disse variationer i opfattelsen af produkterne ved to normalfordelinger. Figur 5 viser en situation med to A-produkter og et enkelt B-produkt. B-produktet har gennemsnitlig en højere smagsintensitet end A-produkterne, mens det kan ske indimellem, at et B-produkt opfattes som værende af lavere smagsintensitet

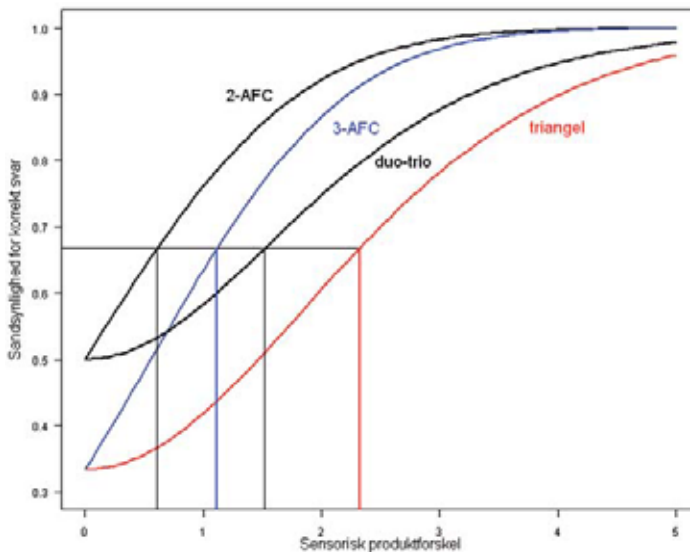


Menneskets egen psykologi spiller en afgørende rolle, når personer anvendes som "måleinstrument". Hvis en skærm eksempelvis viser madvarer, og forsøgspersonen er sulten, vil personen muligvis opfatte gengivelsen som værende af bedre kvalitet, end hvis billedet er ubehageligt at se på. Statistikken kan anvendes til at sætte tal på sådanne fejlkilder.

end et A-produkt. På spørgsmålet "Hvilket produkt adskiller sig fra de to andre?" vil svaret i det konkrete tilfælde i figuren være "a1" – altså det forkerte svar i forhold til den sande middelsituation. Med regneregler for to normalfordelinger kan man beregne sandsynligheden for faktisk at få det korrekte svar som funktion af forskellen i gennemsnitlig smagsintensitet mellem de to produkter (se figur 6). Denne såkaldte psykometriske funktion for triangeltesten kan man så bruge til at bestemme, hvor stor forskellen egentlig er ud fra brøkdelen af korrekte svar – ved at gå baglæns, fra y til x , i figuren. Hvis der f.eks. svares korrekt i 67 % af tilfældene, vil man estimere forskellen i smagsintensitet til 2,3. Lad os forestille os, at man på forhånd ved, at det, der adskiller produkterne, er f.eks., at B-produkter vil være sødere end A-produkter, men spørgsmålet er, om det er stærkt nok til at kunne opfattes af mennesker. Så kunne man i stedet stille følgende spørgsmål til bedømmeren: "Hvilket af de tre produkter smager sødest?" Erfaringen har så vist, at man får flere korrekte svar på dette spørgsmål end ved triangeltesten. Det betyder altså, at den matematiske model udledt ovenfor ikke kan bruges her: Sandsynligheden for at svare korrekt i dette tilfælde kan dog ligeledes findes ud fra de to normalfordelinger – dette bliver en anden psykometrisk funktion. I figur 6 er vist fire forskellige psykometriske funktioner – to af dem for situationer, hvor man kun bruger to prøver i bedømmelsen i stedet for tre. Man kan se, at disse modeller således kan håndtere, at man får forskellige svar alt efter, hvordan man stiller spørgsmålet og udformer selve smagstesten. Man lader sig således ikke vildlede af denne problematik, men kan blive klog på produktinformationen i stedet for falske effekter af, hvorledes man udfører tingene. Eksemplet viser, hvorledes matematiske modeller kommer i spil for at løse konkrete problemstillinger i f.eks. industriel produktudvikling.



Figur 5.



Figur 6.

Perspektivering

Utallige beslutninger såvel i industrien og forskningen som politisk samfundsmæssige tages med baggrund i indsamlede datamaterialer. Der begås således masser af både type 1 og type 2 fejl. Specielt type 2 fejl kan begås, hver gang man ikke har undersøgt noget grundigt nok – hvilket af økonomiske grunde ofte forekommer. Undersøgelser, der fører til det resultat, at man ikke fandt noget, altså at man ikke kan forkaste nulhypotesen, bliver nemt genstand for debat og kritik. Det gælder eksempelvis den danske undersøgelse af mulig kræftisiko ved brug af mobiltelefoner. Man kan altid diskutere, om sådanne undersøgelser er gennemført på tilstrækkelig omhyggelig vis – og alle undersøgelser har begrænsninger i deres gyldighed.

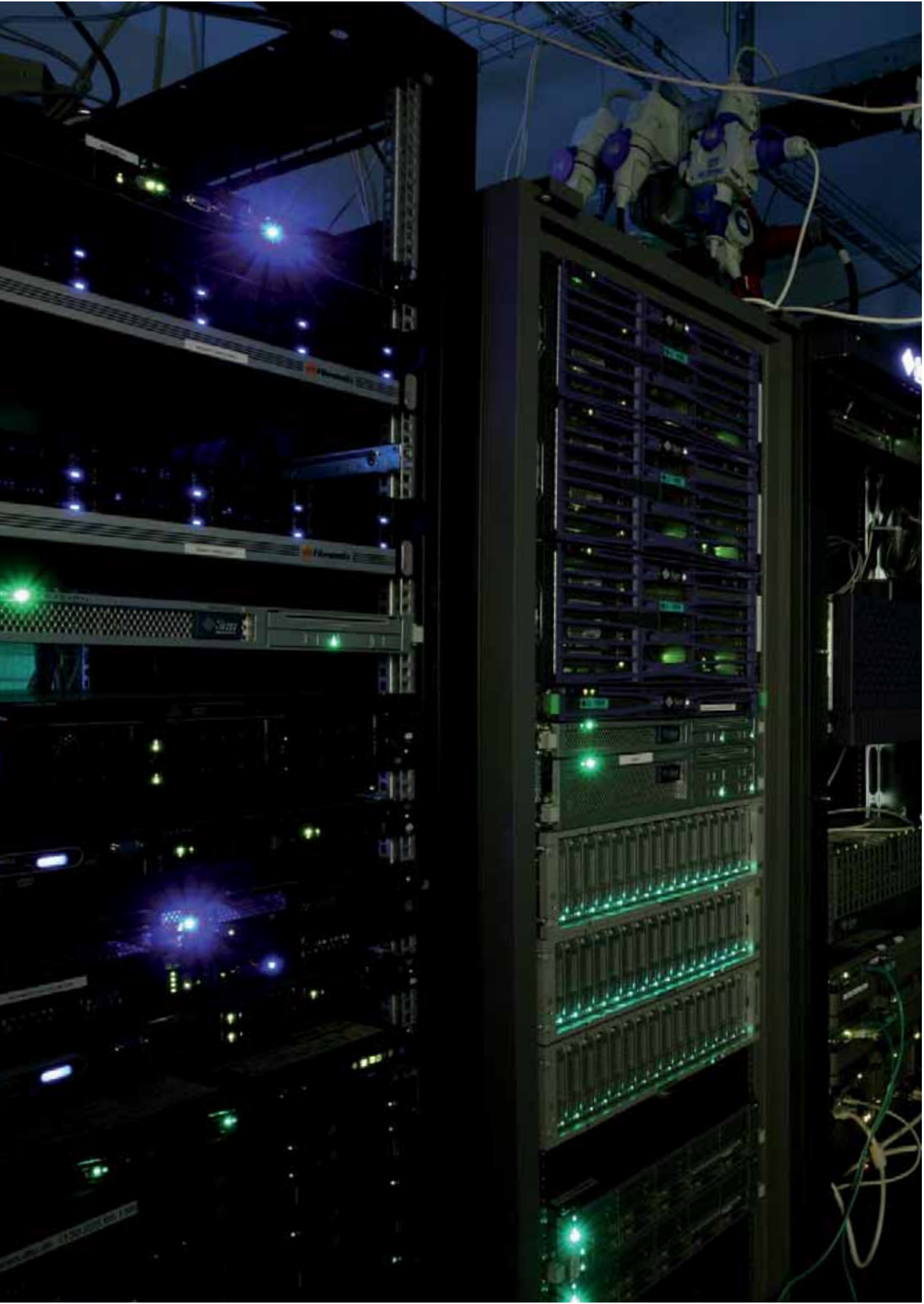
Undersøgelser, der faktisk dokumenterer en eller anden form for forskel og/eller effekt, altså hvor man forkaster nulhypotesen, er nemmere at forstå i almindelighed. En lav såkaldt P-værdi kan folk forholde sig til – det må jo betyde et eller andet. Omvendt er det sværere helt at forstå, i hvor høj grad man egentlig har bevist, at der ikke er nogen effekt, blot fordi man ikke opdager en sådan. Dette er en klassisk problematik, også inden for forskningsverdenen. Der er langtfra konsensus i forskningsmiljøerne omkring, hvordan man skal afrapportere et “tomt” resultat. Der kan endda være en risiko for, at sådanne undersøgelser aldrig bliver offentliggjort og således bidrager til en skævvridning af vores viden på enkelte områder.


Med computerudviklingen de seneste årtier er der sket en revolution i de beregninger, man kan gennemføre, og man kan således nu håndtere matematiske udtryk, som man end ikke har lyst til at forsøge at opskrive analytisk. Et af de vigtige redskaber for statistikken er, at man kan simulere tilfældighed med computeren. Man kan simulere en hvilken som helst fordeling, hvilket er et fantastisk og særdeles anvendeligt regneværktøj. Et andet aspekt af computerrevolutionen er, at der i dag indsamles data på mega, giga og terrabyte niveau. Det kan være kæmpestore databaser i virksomheder og offentlige myndigheder, onlinemålinger af kemiske spektre på en produktionslinje hos en farmaceutisk virksomhed, genetiske fingeraftryk, videoovervågningsoptagelser eller simpelt hen internettets information. Med dette har statistikken/dataanalysen udviklet sig i nye retninger, hvor det at kunne håndtere mangedimensionale observationer, frem for blot en enkelt regnearkskolonne ad gangen, spiller en stigende rolle. Der er sideløbende opstået tværfaglige forskningsfelter som bioinformatik, data mining, kemometri, sensometri m.m., hvor der arbejdes med videreudviklingen af sådanne metoder.

Artiklens forfatter



Professor Per Bruun Brockhoff



A photograph of a server room. The room is dark, with the primary light source being the numerous green indicator lights on the server racks. The racks are arranged in long aisles, receding into the distance. In the foreground on the left, a rack is more clearly visible, showing a grid of lights and some text. A white cable is plugged into a patch panel at the top left. The overall atmosphere is technical and futuristic.

Matematikken i computerens verden - computeren i matematikens tjeneste

Det engelske ord *computer* betyder *beregner*, og computeren blev oprindelig udviklet netop til at foretage lange og komplekse beregninger, som den kan gøre hurtigere og mere pålideligt end noget menneske (og uden at brokke sig). Det viste sig imidlertid hurtigt, at computeren også er særdeles velegnet til mange andre opgaver, og i dag bruger vi computere til både underholdning og rekreation (f.eks. musik, film og spil), til lektier (stile, rapporter osv.) og til arbejde (f.eks. administration eller kommunikation). I dette kapitel vil vi se på computerens nutidige anvendelse til dens oprindelige formål: Som en meget avanceret regnemaskine og et uundværligt værktøj til at foretage matematiske beregninger samt store og komplicerede simuleringer med vigtige praktiske anvendelsesmuligheder i det moderne samfund.

Hvorfor bruger vi computeren til matematik?

Som vi har set i andre kapitler i bogen, er matematikken udviklet igennem tusinder af år – mens computeren i dens nuværende form kun har stået til rådighed i de sidste ca. 50 år. Kan en sådan opkomling virkelig tilføre matematikken noget interessant? Svaret er selvfølgelig ”ja”, og det skyldes primært computerens evne til at foretage omfangsrige og komplekse *beregninger*, som det ellers ikke var muligt at gennemføre på anden vis. Mange af de beregninger, som ingeniører rutinemæssigt foretager, når de eksempelvis designer en bilmotor, en vindmølle eller en bro, kan faktisk kun udføres på en computer. Ingeniøren bruger computeren til at *simulere*, hvorledes motoren virker, så den kan udnytte brændstoffet optimalt, samtidig med at den forurener og støjer mindst muligt, eller til at simulere, hvordan en bro kan blive påvirket under en orkan, så man sikrer den bedst mulige konstruktion.

En anden grund til at bruge computeren til disse matematiske beregninger er, at vi – på trods af matematikkens fremskredne stadie – stadig ikke har udviklet præcise matematiske udtryk for mange af de problemer, vi ønsker at løse som delproblemer i vores simuleringer. Faktisk er der en uendelig mængde af problemer, som slet ikke kan løses med matematikkens formler. Eksempler er integralerne, som ikke kan udtrykkes med formler, samt løsningerne til ligninger af grad højere end 5, der heller ikke kan udtrykkes med formler. I stedet kan vi udvikle såkaldte *numeriske metoder* til computeren, som kan give løsninger til disse problemer i form af tal og grafik.

Et eksempel på, hvordan vi anvender computeren til begge typer opgaver, er Google's Page Rank, som søgemaskinen bruger til at vælge den rækkefølge, hvormed søgeresultaterne vises. Google benytter en kæmpestor matematisk model af internettet som et netværk, hvor nettet udgøres af forbindelserne (links) mellem hjemmesiderne, og hvor nettets knudepunkter udgøres af samtlige hjemmesider på internettet. Netværket indeholder i dag mere end 10^9 knudepunkter (hjemmesider), og det vokser for hver dag. Beregning af Page Rank kræver, at man beregner en såkaldt egenvektor for dette kæmpestore

netværk. Imidlertid kan det bevises, at denne matematiske størrelse, egenvektoren, ikke kan udtrykkes med formler, når nettet har mere end 5 (fem!) knudepunkter. Google er altså nødt til at benytte en – hurtig – numerisk metode til at beregne denne egenvektor.

Fra abacus til computer

Vi har altid brugt hjælpemidler til at udføre forskellige beregninger. Allerede for 3.000 år siden brugte man kuglerammer (abacus) i Kina og andre kulturkredse, og selv i dag kan man stadig se kuglerammer i brug i Asien. De matematiske operationer, man kan udføre på en abacus, er begrænsede, men det var først i det 17. århundrede, at der skete en yderligere udvikling, da regnestokken blev opfundet. Dette hjælpemiddel blev først afløst af lommeregneren i 1970'erne. Det var med udviklingen af elektro-mekaniske komponenter og behovet fra militæret, at der skete store gennembrud ikke mindst med opfindelsen af transistoren og senere integrerede kredsløb, altså muligheden for at bygge mange transistorer ind i en "chip".

Denne udvikling – miniaturisering – gjorde det muligt at bygge regnemaskiner i en størrelse, der er egnet til hverdagsbrug: lommeregneren. De første "lommeregner" kom på markedet i slutningen af 1960'erne, men resultaterne blev stadigvæk vist på en papirstrimmel. Først udviklingen af LED og senere LCD displayet gjorde det muligt at tale om en rigtig lommeregner, der faktisk kan ligge i lommen. Mens de første lommeregner på markedet var ret begrænsede i antallet af de indbyggede funktioner, er chippen i de moderne lommeregner så kraftig, at den kan udføre små programmer til at fortolke analytiske udtryk og vise dem grafisk.

Opbygningen af en computer

Næsten alle computere er bygget efter det samme princip. Beregninger foregår i computerens CPU (Central Processing Unit), mens data og programkoderne bliver lagret i RAM (Random Access Memory). Tallene i en computer bliver repræsenteret af kombinationer af bits og bytes. En bit er 0 eller 1, og 8 bits udgør en byte. Ved hjælp af dette binære system kan vi gemme tal i computeren – men faktisk kun de hele tal! For at kunne repræsentere de reelle tal på computeren har man fundet en repræsentation, der gemmer tallene i to dele: en komma-del (kaldet mantisse) og en eksponent. Disse computer-tal kaldes *flydende tal*, og vi kender dem fra vores lommeregner, hvor $1.2345E3$ betyder $1,2345 \times 10^3 = 1,23 \times 1000 = 1234,5$. I dette eksempel er 1.2345 mantissen, og 3 er 10-tals eksponenten. Princippet i computeren er det samme – bortset fra at den bruger 2-tal systemet. For at kunne regne med flydende tal skal computeren anvende specielle regler, der er forskellige fra de regler, vi bruger til at regne med hele tal. I de første pc'er, der kom på markedet i 1980'erne, var disse regneregler programmeret i software; mens alle moderne CPU'er har specielle hardwareenheder, der kan regne med flydende tal: de såkaldte Floating Point Units (FPU).

Computeren ved nu, hvordan den skal håndtere tal (også kaldt data), men nu skal disse

data også flyttes fra hukommelse (RAM) til processor (CPU) – og resultaterne skal gemmes igen i RAM. I en typisk pc vil hastigheden af beregningerne i CPU'en være mange gange hurtigere end den hastighed, hvormed data kan flyttes fra hukommelsen til CPU'en. Det betyder, at CPU'en skal vente det meste af tiden for at kunne udføre de næste beregninger. For at forkorte disse ventetider har alle moderne processorer indbygget et mellemlager (den såkaldte *cache*), der er ikke så stort, men hvor data kan tilgås meget hurtigere end fra det store datalager (RAM).

Cachens funktion kan sammenlignes med følgende situation: Ved middagsbordet beder far om en øl, og sønnen Børge bliver sendt ned i kælderen for at hente en flaske. Det tager Børge ca. 3 minutter at hente én flaske øl. Nu er far altid meget tørstig, så Børge har udviklet en 'smart' strategi: I stedet for at hente kun én flaske i kælderen, henter han så mange flasker, som han kan bære, f.eks. 4, og gemmer de 3 ekstra flasker i køkkenet. Næste gang far spørger efter en øl, tager det kun mindre end et minut at hente en ny flaske (vejen frem og tilbage i køkkenet). Kun når mellemlageret er tømt, skal Børge gå en tur i kælderen igen – eller når far pludselig beslutter sig for, at han skal have vin i stedet for øl.

På den samme måde fungerer cachen i en computer: Der bliver altid læst mere data ind i cachen, end der skal bruges, i forventningen om, at de tal, der blev hentet fra hukommelsen, skal bruges i de næste beregninger. Gode algoritmer og programmer vil derfor forsøge at udnytte dette for at kunne opnå en god performance, dvs. en hurtig afvikling af beregningerne.

Algoritmer til computerberegninger

Men hvordan laver computeren (eller lommeregneren) en matematisk beregning, f.eks. kvadratroden af et tal? Her hjælper matematikken ikke rigtig – kvadratroden af 2 er jo simpelthen $\sqrt{2}$. Men vi har brug for at beregne dette tal med så mange cifre, som vi nu har på vores computer eller lommeregner. I gamle dage brugte man tabeller – i dag beregner vi faktisk kvadratroden hver gang vi har brug for den. Metoden til beregning af kvadratroden kaldes Herons metode (efter Heron fra Alexandria, ca. 10-70 e.Kr.). Vi starter med et gæt på kvadratroden og forbedrer gradvist vores gæt, indtil det er nøjagtigt nok. Lad os sige, at vi vil beregne $\sqrt{2}$. Vi starter med at gætte på tallet 1,5 ($\sqrt{2}$ må jo ligge mellem 1 og 2). Vi kan nu beregne et bedre gæt som gennemsnittet af vores gæt og 2 divideret med gættet, altså $\frac{1}{2}(1,5 + 2/1,5) = 1,4167$. Næste gæt beregnes med samme teknik, og vi får $\frac{1}{2}(1,4167 + 2/1,4167) = 1,4142$. Nu har vi allerede – efter to forbedringer – fem korrekte cifre. Vi kunne fortsætte, men stopper her.

Den præcise beskrivelse af, hvorledes vi forbedrer vores gæt, er et eksempel på en algoritme, dvs. en opskrift for, hvad vi skal gøre (sammenlign med bageopskrifter). En god algoritme beregner en nøjagtig løsning hurtigt – altså med få trin.

Når vi skal have computeren til at beregne kvadratroden af et vilkårligt tal, må vi omsætte algoritmen til et computerprogram. Algoritmen ser således ud, når vi skal beregne kvadratroden af tallet a:

$x = \text{startgæt}$
 gentag indtil x er nøjagtig nok

$$x = (x + a/x) / 2$$

 slut

OPGAVE

Prøv at bruge denne algoritme til at beregne kvadratroden af 3, 9 og 0,3.
 Hvilken strategi vil du bruge til at stoppe processen (stopkriterium)? Kan du selv finde en god algoritme til at lave et godt startgæt for et vilkårligt positivt tal a ?

Selvom vi har mange cifre i vores lommeregner og endnu flere cifre i en stor computer, så må vi fortsat leve med et fast og begrænset antal cifre. Og ikke alle tal kan skrives med et begrænset antal cifre: Tallet $1/3$ er ikke det samme som $0,3333333333$ (selvom de to tal er ganske tæt på hinanden). Computeren kan altså ikke altid regne helt korrekt med sine flydende tal. Men skulle det dog betyde noget, at vi får disse ganske små fejl i vores beregninger, fordi vi ikke har uendelig mange cifre i vores computer? Desværre er svaret "ja". Når vi laver millionvis af beregninger, kan disse fejl godt hobe sig op og få betydning for resultaterne.

Men selv med ganske få beregninger kan vi få en stor fejl, og det er nemt at give et eksempel. Det er velkendt, at de to løsninger til 2. grads ligningen $A X^2 + B X + C = 0$ (hvis de eksisterer) er givet ved

$$X = (-B \pm (B^2 - 4AC)^{1/2}) / (2A).$$

Lad os prøve at bruge en lommeregner (TI-89) til at beregne de to løsninger, når $A = 1$, $B = 87654321$ og $C = -3$. Lommeregneren beregner svarene

$$X_1 = -8.7654321E7 \text{ og } X_2 = 0.$$

De korrekte løsninger er imidlertid ca. $-8.7654321E7$ og $3.42254E-8$. Den første løsning er altså beregnet rigtigt, men den anden er beregnet ganske forkert – formlen er matematisk korrekt, men ikke velegnet til beregner med flydende tal på en computer. Denne algoritme er meget bedre:

Hvis $B > 0$

$$X_1 = (-B - (B^2 - 4AC)^{1/2}) / (2A)$$

ellers

$$X_1 = (-B + (B^2 - 4AC)^{1/2}) / (2A)$$

$$X_2 = C / (A X_1)$$

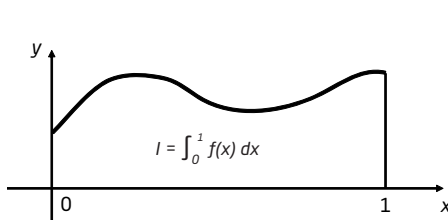
OPGAVE

Prøv at bruge denne algoritme på problemet med $A = 1$, $B = 87654321$ og $C = -3$. Får du mere nøjagtige resultater?

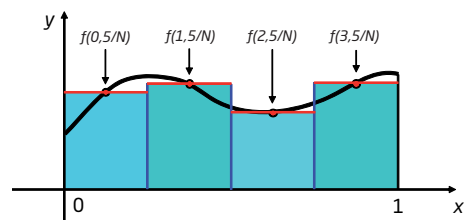
Andre beregninger

Nu kan vi beregne kvadratrødder og løse 2. grads-ligninger. Det er et skridt på vejen ... men det rækker ikke så langt, hvis vi skal designe en motor eller en bro! I dette kapitel kommer vi naturligvis ikke frem til at beskrive matematikken og de numeriske metoder, der bruges til sådanne store og komplicerede designopgaver. Men vi vil fortælle om et par matematiske beregninger, som forekommer ganske ofte som dele af større beregningsopgaver.

Integraler er et godt eksempel. Vi kan bruge et *integral*, når vi skal beregne, hvor meget cigaretrøg vi indånder til en fest, eller hvor mange UV-stråler vi modtager, når vi soler os, eller hvor meget energi vi bruger på at køre fra punkt A til punkt B. Vi kender formelen for integralet af funktionen $f(x)$. Lad os antage, at vi vil beregne integralet over intervallet fra 0 til 1 (se figur 1):



Figur 1. Integralet I er arealet under grafen for $f(x)$.



Figur 2. Vi tilnærmer integralet I med arealet af kasserne.

Ved hjælp af vores formelsamling kan vi finde stamfunktionen til $f(x)$ og bruge den til at beregne integralet. Men hvad nu hvis $f(x)$ ikke har en stamfunktion (dette er faktisk tilfældet for en lang række funktioner), eller hvad hvis vi ikke kender formelen for $f(x)$, men i stedet har målt en række værdier for denne funktion? Husk, at hvis funktionen $f(x)$ er positiv for alle x i integrationsintervallet, så er integralet I lig med arealet mellem x -aksen og grafen for $f(x)$. Det bruger vi som udgangspunkt! Vi vælger et heltal N og deler intervallet fra 0 til 1 op i N del-intervaller

$$[0, 1/N], [1/N, 2/N], [2/N, 3/N], \dots, [(N-1)/N, 1].$$

I hvert af disse små intervaller gør vi noget brutalt: Vi erstatter funktionen $f(x)$ med den konstante funktion, som har værdien af $f(x)$ i intervallets midtpunkt. I første interval bruger vi altså den konstante funktion med værdien $f(0,5/N)$, i næste interval den konstante funktion med værdien $f(1,5/N)$ osv. (se figur 2). Vi har nu erstattet problemet at beregne integralet I med beregning af integralet af en funktion, som er stykkevis konstant i de N delintervaller. Det nye integral er supernemt at beregne: Vi skal blot beregne summen af arealerne (altså af kasserne i figur 2) i alle delintervallerne.

I matematisk notation skriver vi altså:

$$I_N = (f(0,5/N) + f(1,5/N) + \dots + f((N-0,5)/N)) / N$$

Tallet I_N kan bruges som en tilnærmelse til det integral I , vi egentlig ønsker at beregne, og formelen er ikke begrænset til positive funktioner. Det kan vises, at hvis N er et meget stort tal, så er I_N en god tilnærmelse til I (vores intuition siger os det samme).

OPGAVE



Prøv at bruge formlen til at beregne integralet af $\sin(x)$ i intervallet fra 0 til 1 for forskellige værdier af N (prøv f.eks. $N = 1, 2, 4, 8$ og 16), og sammenlign med det korrekte resultat $I = 1 - \cos(1) = 0,45969769413186$. Du skulle gerne se, at fejlen $I - I_N$ bliver mindre, når N bliver større.

Flere integrationsformler

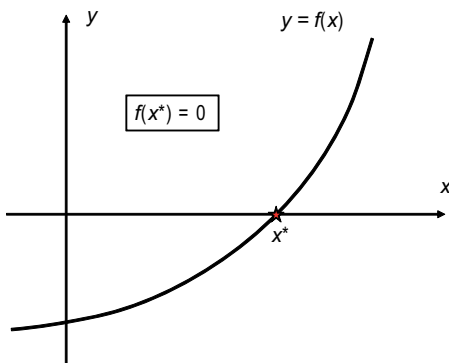
Formlen, vi lige har set ovenfor, er nem at forstå. Der findes mere nøjagtige formler, men de er sværere at udlede (det springer vi over her). Disse to formler giver mere nøjagtige resultater, når man bruger samme værdi af N til beregning af integralet fra 0 til 1:

$$J_N = (\frac{1}{2} f(0) + f(1/N) + f(2/N) + \dots + f((N-1)/N) + \frac{1}{2} f(1)) / N$$
$$K_N = (f(0) + 4 f(1/N) + 2 f(2/N) + 4 f(3/N) + 2 f(4/N) + \dots + 4 f((N-1)/N) + f(1)) / (3N)$$

NB: Den sidste formel kan kun bruges, når N er et lige tal. Vi beregner igen tilnærmelser til I fra før med forskellige værdier af N , og i tabellen herunder viser vi fejlene $|I - J_N|$ og $|I - K_N|$. Bemærk, at den sidste formel (som hedder Simpsons formel) giver meget mere nøjagtige resultater for det samme beregningsarbejde!

N	2	4	8	16
$ I - J_N $	0,00962	0,002397	0,00059872	0,000149651
$ I - K_N $	0,00016	0,000010	0,00000062	0,000000039

Rødder er et andet eksempel på beregninger, som forekommer ganske ofte som dele af større beregningsopgaver. En rod er løsningen til ligningen $f(x) = 0$ (se figur 3).



Figur 3. Roden x^* er løsningen til ligningen $f(x) = 0$.

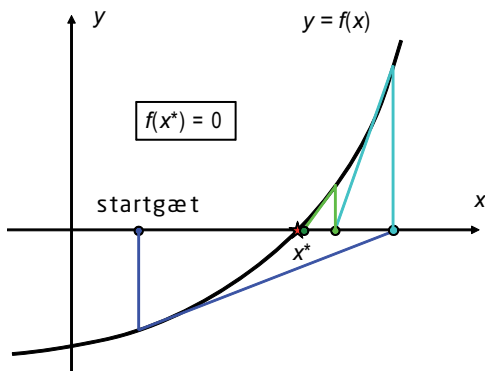
Hvis vi kaster en bold og vil ramme noget (eller nogen) i afstanden A fra os, så skal vi løse denne nulpunktsligning med $f(x)$ givet ved:

$$f(x) = V^2 \sin(x) \cos(x) - \frac{1}{2} g A,$$

hvor V er hastigheden, vi kaster med, x er kastevinklen, og $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ er tyngdeaccelerationen (vi har ignoreret luftmodstand osv.). Hvis vi løser ligningen, kan vi altså beregne den vinkel, vi skal kaste, hvis vi ønsker at ramme. Godt at vide – men hvordan løser vi ligningen?

Præcis som ved beregningen af kvadratrødder skal vi bruge en algoritme, som, ud fra et startgæt, beregner bedre og bedre gæt på løsningen (beregning af kvadratroden er faktisk et specialtilfælde med $f(x) = x^2 - a$). Vi vil beskrive en algoritme, som tilskrives Newton, og som forudsætter, at vi kan beregne både funktionen $f(x)$ og dens første afledede $f'(x)$. Algoritmen tager denne form:

$x = \text{startgæt}$
 gentag indtil x er nøjagtig nok
 $h = -f(x) / f'(x)$
 $x = x + h$
 slut



Figur 4. Newtons metode. Efter tre forbedringer af vores startgæt er vi kommet tæt på roden x^* .

Det er nemmest at forklare denne algoritme ud fra figur 4. Når vi står i gættet x , så tager vi et skridt h hen til det næste gæt. Dette skridt får vi ved at gå ud langs tangenten i $f(x)$, indtil vi rammer x -aksen. Hvis vi startede med et gæt, som er tæt nok på roden, så kan vi bevise, at vi vil beregne bedre og bedre gæt!

OPGAVE

Kan du finde frem til udtrykket $h = -f(x) / f'(x)$ for skridtet ud fra figuren? Prøv at bruge Newtons algoritme på kasteprøbet med $A = 35 \text{ m}$ og $V = 22 \text{ m/s}$. Vi oplyser, at den første afledede, er givet ved

$$f'(x) = V^2 (\cos^2(x) - \sin^2(x))$$

og det er vigtigt, at vinklerne udregnes i radianer i formlerne for $f(x)$ og $f'(x)$. Brug startgættet $x = 0$. Hvor mange gange skal du forbedre gættet, før x er nøjagtig nok?

Eksempel på computerkode

Der findes mange programmeringssprog til matematiske beregninger på computere. Fortran, C, C++, Java og Matlab er blot nogle få af de vigtigste. Her viser vi, hvordan Matlab-koden kan se ud for beregning af integral og rod:

```
function I = integral(f,a,b,N)
I = 0;
for i=1:N
    x = (i-0.5)/N;
    I = I + f(x);
end

function x = rod(f,fafl,x0)
x = x0; % Brugernes startgæt
h = 1;
while abs(h) > 1e-6 % Stop når skridtet er lille
    h = - feval(f,x)/feval(fafl,x);
    x = x + h;
end
```

Hvad gør vi, når vi har data med målefejl?

Matematikken beskæftiger sig med eksakte og præcise formler og udtryk. Interessant nok giver matematikken os også et værktøj til at håndtere de fejl og den støj, som vi i praksis altid må leve med, når vi laver målinger. Matematikken fortæller os præcist, hvad vi skal gøre for at undertrykke fejlene og filtrere støjen, og hvor meget vores beregnede resultater bliver påvirket af fejl og støj.

Filtrering

Du har lige optaget din guitarsolo – men desværre er der kommet noget støj med ind i mikrofonen. Kan vi fjerne denne støj med matematiske metoder? Sommetider! Musik gemmes på computeren som en lang række tal. Lad os sige, at vores lydsignal ideelt (dvs. uden støj) skulle være

122 129 137 144 151 158 164 171 177 182 187 192 196 200 203 ...

men pga. støjen har vi optaget dette signal:

134 117 121 156 157 138 180 171 179 186 197 206 192 184 213 ...

Kan vi beregne det støjfri signal? Nej – ikke fuldstændig – men vi kan slippe af med noget af støjen ved at *filtrere* det støjfyldte signal.

Her er algoritmen: Lav et nyt signal, hvor hvert tal beregnes som gennemsnittet af de 7 tal, der ligger omkring det gamle tal (tallet selv, de tre til venstre og de tre til højre). Altså, vi tager det fjerde tal, 156, og beregner gennemsnittet af de 7 tal, der ligger symmetrisk omkring 156, dvs. tallene

134 117 121 156 157 138 180 .

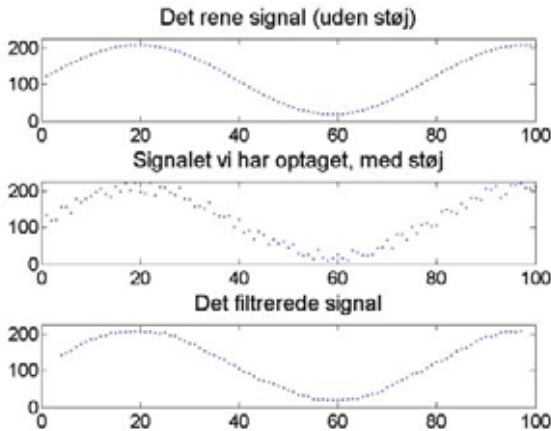
Gennemsnittet er $(134+117+121+156+157+138+180)/7 = 143$ (afrundet til heltal), som er første tal i det filtrerede signal. Nu gentager vi processen med det næste tal, 157, og de 7 tal, der ligger omkring dette:

117 121 156 157 138 180 171 .

Gennemsnittet af disse tal er 149 (igen afrundet til heltal). Og sådan fortsætter vi, indtil vi er færdige, med alle tallene. Hvis x_1, x_2, x_3, \dots er tallene i det støjfyldte signal, og z_1, z_2, z_3, \dots er tallene i det filtrerede signal, så kan vores algoritme beskrives således:

$$z_i = (x_{i-3} + x_{i-2} + x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3})/7, \quad i = 4, 5, 6, \dots$$

Bemærk, at vores filtrerede signal er en smule kortere end det oprindelige signal – vi mangler de første tre og sidste tre elementer. Figuren herunder viser, at vi faktisk får filtreret en god del af støjen!



Figur 5. Filtrering af et signal med støj.

Unøjagtigheder

Unøjagtigheder i vores målinger har indflydelse på de resultater, vi beregner med vores matematiske algoritmer. Et interessant spørgsmål er, hvor meget disse fejl kan påvirke vores resultater. Igen giver matematikken os et værktøj til at lave denne analyse.

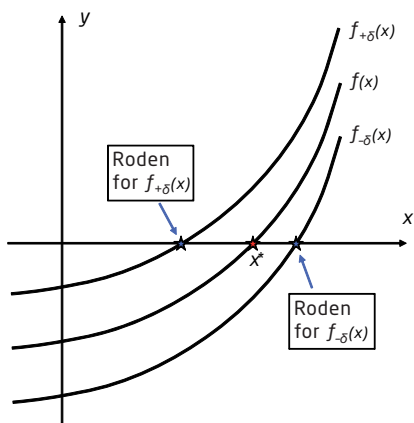
Som eksempel vender vi tilbage til kasteproblemet fra tidligere, og lad os sige, at vi ikke kender afstanden A præcist – hvad vi véd er, at afstanden er målt med en nøjagtighed på $\delta = 10$ cm. Det skriver vi på formen $A = 33,0 \text{ m} \pm 0,1 \text{ m}$. Hvor stor indflydelse har usikkerheden δ på den kastevinkel x , vi beregner?

Vi bliver nødt til at se på, hvordan funktionen $f(x)$ ændres, når vi ændrer A . Hvis vi erstatter A med $A \pm \delta$, får vi to nye funktioner

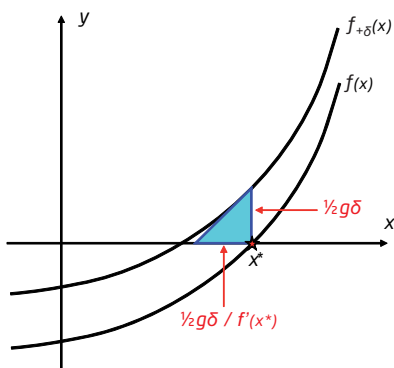
$$\begin{aligned} f_{+\delta}(x) &= f(x) + \frac{1}{2} g \delta, \\ f_{-\delta}(x) &= f(x) - \frac{1}{2} g \delta. \end{aligned}$$

Figur 6 viser graferne for $f(x)$, $f_{+\delta}(x)$ og $f_{-\delta}(x)$ omkring roden x^* . Vi kan se, at når $f(x)$ ændres til $f_{+\delta}(x)$, altså flyttes op, så flytter roden sig til venstre. Tilsvarende: Når $f(x)$ ændres til $f_{-\delta}(x)$, flytter roden sig til højre.

Hvor meget flytter roden sig? Vi kan få et godt gæt ved at se på den trekant, der udgøres af x -aksen, en lodret linje i roden x^* og tangenten i $f_{+\delta}(x^*)$, se figur 7. Hældningen af denne tangent er $f'_{+\delta}(x^*) = f'(x^*)$, og tangenten skærer x -aksen i $x = x^* - \frac{1}{2}g\delta/f'(x^*)$. Roden har altså ca. flyttet sig stykket $\frac{1}{2}g\delta/f'(x^*)$ til venstre. Helt tilsvarende ser vi, at roden for $f_{-\delta}(x)$ ca. flytter sig $\frac{1}{2}g\delta/f'(x^*)$ til højre. Usikkerheden på roden er altså ca. $\pm \frac{1}{2}g\delta/f'(x^*)$, og vi kan skrive usikkerheden på roden som $x^* \pm \frac{1}{2}g\delta/f'(x^*)$. Når vi indsætter tallene, får vi $f'(x^*) = V^2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 341,5$ og $\frac{1}{2}g\delta/f'(x^*) = 0,000143$ radianer $= 0,082^\circ$.



Figur 6. Roden flytter sig, når vi ændrer $f(x)$.



Figur 7. Hvor meget har roden flyttet sig?

Vi kan naturligvis vende argumentet og sige, at hvis vi ændrer kastevinklen $\pm\Delta x$, så rammer vi inden for afstanden $A \pm \Delta A$.

OPGAVE

Kan du vise, at sammenhængen mellem Δx og ΔA er

$$\Delta A = 2\Delta x/g?$$

Hvor meget kan vi ca. risikere at ramme ved siden af, hvis $\Delta x = 5^\circ = 0,0873$ radianer?

Kan du gennemføre en lignende analyse, hvis vi kender A præcist, men har usikkerheden $V \pm \Delta V$ på kastehastigheden? Hjælp: Du skal finde ud af, hvordan $f(x)$ ændrer sig, når du ændrer V til $V \pm \Delta V$.

Store beregninger kræver store computere

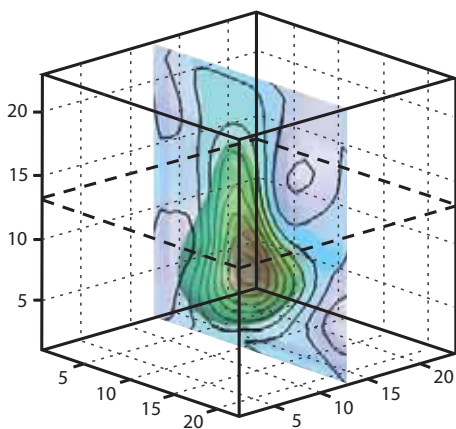
Hvis man skal løse store opgaver som en simulering af tusindvis af molekyler eller en beregning af luftstrømmen omkring en vindmøllevinge, løber man hurtigt ind i problemer. Computerens hukommelse er ikke stor nok, og selv med meget RAM tager det alt for lang tid at udføre beregningerne. Man kan ikke nøjes med bare én computer eller CPU til sådanne store opgaver. Enten kræves flere CPU'er i én stor computer (en såkaldt 'Symmetric Multi Processor' eller SMP computer) eller en klynge af små standard-computere med en eller flere CPU'er, der er forbundet med et hurtigt netværk.

Hardwareudviklingen og priserne har gjort klynger til de dominerede maskiner på ranglisten over verdens hurtigste computere, TOP500 listen (www.top500.org). For 15-20 år siden var denne liste domineret af specielt udviklede maskiner. Fælles for alle store computersystemer er, at man ved hjælp af parallelle programmer deler problemet op i

mindre problemer, der kan løses på de enkelte processorer. Da de små problemer typisk ikke er uafhængige, skal man også bruge en del ressourcer til kommunikation mellem de enkelte beregninger. Denne kommunikation sker enten gennem udveksling af data i hukommelsen (SMP maskiner) eller via netværkskommunikation (klynge). Afhængig af problemstillingen vil der altid være problemer, der bedst kan løses på enten den ene eller den anden type af parallelcomputer.

Kunsten at skrive programmer til disse parallelcomputere består i at designe nogle koder, der udnytter den underliggende hardware bedst muligt, eksempelvis ved at minimere kommunikationen over netværket i en klynge.

Eksempel med storskalaberegning



Figur 8. Tomografianalyse af et lille stykke metal.

På Risø DTU analyserer man, hvorledes metaller påvirkes, når man f.eks. trykker på dem eller trækker i dem. Metallet bestråles med røntgenstråler, og ved hjælp af målinger af disse kan man ”kigge ind” i metallet uden at skære det i stykker. Dette kaldes computertomografi, og det kræver store beregninger ofte med millioner af data. Figur 8 viser resultatet af en beregning på et lille stykke metal ud fra røntgen-data.

OPGAVE: Tobaksrøg

Susanne holder fest for sine venner, og der bliver røget til festen. Lillebror Knud (som er en nörd) har lånt en røgmåler og har målt, hvor meget nikotin der er i luften på Susannes værelse under festen:

Tid	7 ⁰⁰	7 ¹⁵	7 ³⁰	7 ⁴⁵	8 ⁰⁰	8 ¹⁵	8 ³⁰	8 ⁴⁵	9 ⁰⁰	9 ¹⁵	9 ³⁰	9 ⁴⁵	10 ⁰⁰	10 ¹⁵	10 ³⁰	10 ⁴⁵	11 ⁰⁰	11 ¹⁵	11 ³⁰	11 ⁴⁵	12 ⁰⁰
Nikotin	0	3	2	5	7	4	12	10	15	21	18	15	14	16	15	19	25	24	21	20	16

Nikotinkoncentration på Susannes værelse (målt i $\mu\text{g}/\text{m}^3$) hvert kvarter.

Da man indånder ca. 1 m^3 luft i timen, er den totale mængde af røgpartikler, som man indånder under Susannes fest, givet ved integralet

$$I_{\text{fest}} = \int_7^{12} f(x) dx$$

hvor x er tiden (målt i timer fra klokken 7 til kl. 12), og $f(x)$ er røgen i lokalet. Kan du hjælpe lille Knud med at beregne dette integral? Hvor mange % røg indånder man mindre, hvis man går hjem klokken 11 i stedet for klokken 12?

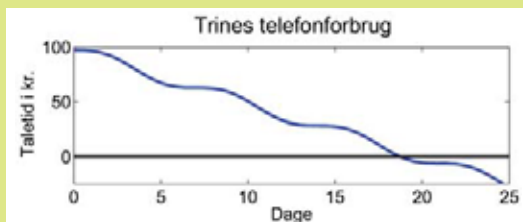
OPGAVE: Taletid



Trines telefonforbrug er større sidst på ugen og i weekenden end på hverdage. Vi vil antage, at hun starter på dag 0 med en taletid på $T = 97,40$ kr., og at hendes resterende taletid kan beskrives ved denne funktion

$$f(x) = T - a(bx - \sin(ax)), \quad a = 2\pi/7, \quad b = 5,50$$

hvor x er tiden målt i dage. Kan du bruge Newtons metode til at løse $f(x) = 0$, dvs. beregne den dag, hvor Trine løber tør for taletid?



Figur 9. Roden i ligningen $f(x) = 0$ er antal dage, inden Trine løber tør for taletid.

Artiklens forfattere



Lektor Bernd Dammann



Professor Per Christian Hansen



An aerial photograph of a railway yard or station. The tracks are curved and converge, with a complex network of overhead power lines and support structures. A red train is visible on the left side. A small white sign with the number '323' is attached to one of the overhead lines. The ground is covered in gravel and some snow or ice. A semi-transparent white box with red text is overlaid on the bottom half of the image.

Operationsanalyse
- the science of
the better

DSB's S-tog i København har dagligt ca. 1.200 afgang fra endestationer og ca. 25.000 afgang i alt. Der er 84 stationer og 170 kilometer dobbeltspor. Togdriften foregår på 5 linjer, der alle har 10 minutters drift. Linjerne er fælles om sporene i det centrale afsnit omkring Københavns Hovedbanegård. Hvert kørende tog er sammensat af togsæt, og S-tog råder over 104 store og 31 små togsæt, der kan kobles sammen til forskellige togstørrelser. Den daglige togdrift udføres af ca. 250 lokomotivførere, og hver fører er på arbejde ca. 7 timer hver dag.

DSB S-tog skal beslutte, hvilke togsæt, der skal på hvilke afgang, og hvilke lokomotivførere der skal køre hvilke tog. Behovet for siddepladser til passagererne skal dækkes, lokomotivførernes arbejdstid skal udnyttes fornuftigt, togsættene skal stå de rigtige steder hver aften, og togsættene skal gennemgå de nødvendige eftersyn og sikkerhedstjek i tide. Hvordan løses en så kompliceret planlægningsopgave samtidig med, at omkostningerne til driften holdes så lave som muligt? Togdrift er et godt eksempel på en kompleks problemstilling, der kræver god planlægning, og i dette kapitel ser vi på, hvordan man i praksis løser denne type planlægningsopgave.

Operationsanalyse - redskabet til planlægning

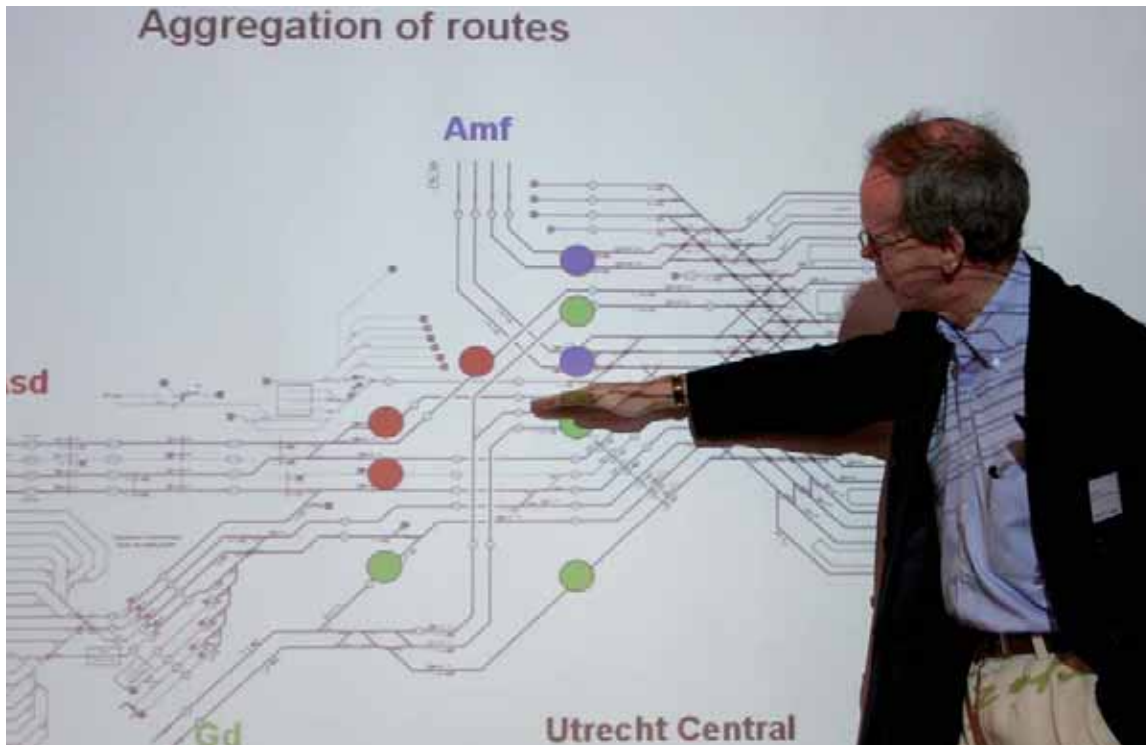
Mange andre steder i vores hverdag stilles der stadig større krav til effektivitet og resourceudnyttelse. Det gælder om at gøre alt på den mest effektive måde og med brug af færrest mulige ressourcer. Med andre ord handler det om god planlægning: Produktionsplanlægning, mandskabsplanlægning, investeringsplanlægning, skemalægning, ruteplanlægning – listen er næsten uendelig lang. Den traditionelle måde at gennemføre planlægning på er at bruge personer med stor ekspertise på området: Hvis det drejer sig om personaleplanlægning i en transportvirksomhed som f.eks. DSB S-tog, har planlæggeren ofte indsigt i togdrift og togekørsel og har måske selv kørt S-tog.

I løbet af de seneste årtier er udviklingen imidlertid gået stærkt på to vigtige områder. Dels større computerkraft og dels forbedrede metoder til at formulere og løse komplekse planlægningsproblemer ved brug af matematiske modeller til optimering. Dette matematiske område kaldes *Operationsanalyse*, altså analyse af det, der udføres – som regel med henblik på at gøre det bedre end hidtil. Flere og flere problemstillinger er i dag kommet "inden for rækkevidde". Derfor bruger mange virksomheder i dag systemer til at støtte deres beslutninger og planlægning, hvor grundkomponenterne er matematiske modeller samt avanceret software til løsning af disse. Systemerne kan typisk effektivisere planerne med 5-10 % over en kort årrække, og i en stor virksomhed med driftsomkostninger på f.eks. 2 milliarder kr. er effektiviseringsgevinsten på 100-200 millioner kr. – et beløb, der ser rigtig pænt ud i regnskabet.

Matematiske modeller - hvad og hvorfor

For at forstå hvordan Operationsanalyse virker i praksis, er det nyttigt først at se på, hvad en matematisk model er, og hvorfor det er en rigtig god idé at angribe komplekse problemstillinger ved hjælp af sådanne modeller. En model er en beskrivelse af en afgrænset del af virkelighed ved brug af et sprog eller værktøj, der "passer" til den planlagte brug af modellen. Arkitekter bygger sommetider skalamodeller i lyst træ, og flykonstruktører bygger modeller af flyvinger. Man nøjes med at tage de dele af virkeligheden med, som er nødvendige for, at resultater fra eksperimenter med modellen faktisk viser noget, hvordan virkeligheden kommer til at se ud i fuld skala.

Når der er tale om en matematisk model, udtrykkes beskrivelsen i en eller anden form for matematisk formalisme. Formalismen skal kunne beskrive data for den relevante problemstilling, man skal kunne udtrykke, hvad det er, man gerne vil opnå, og man skal kunne udtrykke, hvilke betingelser en lovlig plan eller beslutning skal overholde. Ved at udtrykke sit komplekse problem i form af en matematisk model flytter man vægten fra *problemløsning* til *problemformulering*. Alle metoder, der kan bruges til at finde løsningen på en bestemt type matematisk model, kan nemlig bruges til at løse ethvert problem, der kan modelleres med denne type af model.



Store projekter som brobyggeri og trafikstyring i jernbaneknudepunkter kan ikke løses uden brug af matematiske modeller. I dag bruger togselskaber operationsanalytiske teknikker i deres planlægning af både arbejdsdage for personalet og driftsmønstrene for tog.

I praksis giver dette store fordele: Modelbygningen bliver et emne i sig selv, og løsningsmetoder for forskellige matematiske modeller bliver så tilsvarende et andet emne. For at bygge en god model skal man kende sit værktøj (typen af matematisk model) og have forretningsforståelse – for at konstruere en god løsningsmetode skal man være god til matematik og til computerprogrammering.

I de følgende afsnit beskrives to eksempler på planlægningsproblemer, som ikke er helt ligetil at løse uden brug af matematiske modeller. Det ene er planlægning af projektførelse, og det andet er dimensionering af bemanning. Dernæst gennemgås, hvordan disse to problemstillinger begge kan løses ved brug af matematiske modeller, og endelig beskrives, i hvilke brancher matematiske modeller allerede har holdt deres indtog.

Projektplanlægning

Størrelsen af et projekt kan variere fra meget små enmandsopgaver til projekter i milliardklassen som f.eks. brobyggerier eller store forsknings- og udviklingsprojekter. Små projekter er som regel overskuelige. Hvis der kun arbejder en enkelt person på projektet, er selve styringen af projektet normalt forholdsvis simpel: Projektet nedbrydes i delprojekter, der hver for sig estimeres med hensyn til arbejdsindsats. Sammenhængen mellem delprojekterne klargøres, og der laves en projektplan. Det tidsmæssige omfang af projektet er fastlagt bortset fra, at der undervejs kan ske omprioriteringer mellem delprojekterne.

Store projekter, hvor der anvendes betydelige ressourcer, eksempelvis både i form af personer, materialer, energi og økonomi, kræver en helt anden styring, både budgetmæssigt og tidsmæssigt. Typisk opdeles sådanne store projekter i delprojekter ("work packages"), der igen opdeles i delopgaver ("tasks"), som ofte underopdeles i underopgaver ("subtasks"). På den måde kan der budgetteres både økonomisk og tidsmæssigt for det samlede projekt gennem en budgettering for hvert enkelt element i projektet. De enkelte delopgaver har hver for sig en estimeret omkostning og en estimeret tidsramme. Delopgaverne har også en indbyrdes sammenhæng, f.eks. kan man ikke indføre et it-system, før der er truffet beslutning om dataformater og grænseflader til andre it-systemer. De enkelte delopgaver gennemføres ofte af forskellige persongrupper. Derfor kan projektet nu gennemføres på en kalendertid, der er kortere end summen af de enkelte delopgavers varighed. Delprojekter, der ikke er direkte afhængige af hinanden, kan udføres samtidigt.

Rent planlægningsmæssigt har de fleste projekter en fastlagt tidsramme, og første spørgsmål er naturligvis: Kan projektet blive færdigt inden for denne tidsramme? Næste spørgsmål er: Hvad sker der, når et konkret delprojekt bliver forsinket? Vil det forsinke det samlede projekt, eller er delprojektet ikke kritisk? Som regel kan de enkelte delprojekter forkortes, hvis man har ekstra ressourcer til rådighed – men det koster. To spørgsmål er her: Hvad er den absolut korteste tid, et projekt kan gennemføres på, og hvad koster det ekstra? Hvor meget projektforkortelse kan man købe med en ekstrabevilling af en given størrelse? Alle disse spørgsmål kan besvares forholdsvis simpelt ved brug af standard projektplanlægningsværktøjer, der er baseret på matematiske modeller.

Grundlæggende begreber og metoden CPM for projektplanlægning

En lille softwarevirksomhed har en idé til et nyt softwareprodukt, der skal kunne støtte gymnasier i deres skemaplanlægning. For at kunne vurdere realismen i projektet opdeler virksomheden det i delprojekter:

- A. Gennemførelse af kundeundersøgelse
- B. Valg af softwareplatform (Microsoft, OpenOffice, ...)
- C. Udarbejdelse af den tekniske løsning
- D. Udarbejdelse af reklamemateriale
- E. Implementering af produktet til den eller de valgte platforme
- F. Markedsføring af produktet.

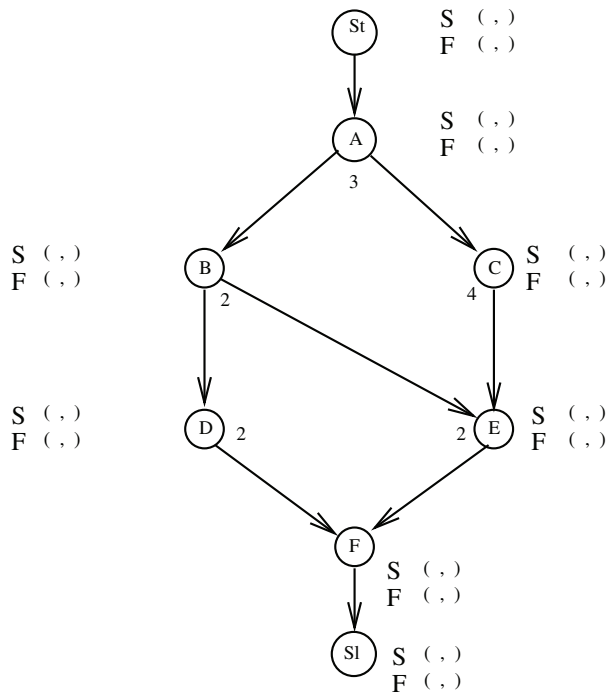
Hvordan skal virksomheden få et overblik over mulighederne for projektets gennemførelse? For at kunne opnå det ønskede overblik skal der for hver delopgave Q foreligge forskellige oplysninger. Der skal foreligge et estimat for udførelsestiden, $d(Q)$, og en liste af umiddelbare forgængere, dvs. delopgaver, hvis gennemførelse er umiddelbare forudsætninger for igangsættelsen af Q. Denne information kaldes *præcedens-information*.

Hvis der skal gennemføres vurderinger af samspillet mellem mulige projektforkortninger og økonomi, skal der for hvert delprojekt Q også foreligge en "crash cost per unit", $c(Q)$, dvs. en ekstra omkostning pr. tidsenhed, den pågældende delopgave afkortes. Der skal også være en angivelse af spillerummet for afkorting ("crash possibility"), $u(Q)$ – man kan ikke regne med at forkorte en delopgave vilkårligt meget ved at tilføre ekstra ressourcer.

Nedenfor ses softwarevirksomhedens estimater for de forskellige delprojekter. Tiden måles i måneder, omkostninger i 10.000 kr. Kundeundersøgelsen estimeres således til 3 måneder, men kan forkortes til 2 måneder med en udgift på 100.000 kr.

Task Q	Immediate pred.	Duration $d(Q)$	Crash pos. $u(Q)$	Crash cost /unit $c(Q)$
A	-	3	1	10
B	A	2	1	2
C	A	4	2	5
D	B	2	1	2
E	B,C	2	1	2

Med disse oplysninger kan der opstilles en matematisk model for projektplanlægningsproblemet i form af et *projektnetværk*. Hvis man repræsenterer aktiviteterne som knuder i netværket, er præcedens-informationen nem at sætte ind – den udgør så forbindelserne i netværket. Til gengæld er det mindre klart, hvordan man får det tidslige aspekt i spil. Hver knude har selvfølgelig tilknyttet sin varighed, men hvordan får man kombineret disse varigheder? Netværket svarende til eksemplet er vist i den efterfølgende figur – varigheden af den enkelte aktivitet er angivet ved siden af aktivitetsknuden.



Løsningen på dette er at knytte fire tal til hver knude: *Earliest Start*, *Earliest Finish*, *Latest Start* og *Latest Finish* (ES, EF, LS og LF). Netværket forsynes derudover med en Start-knude, St, og en Slut-knude, Sl. Disse er *kunstige* aktiviteter med en varighed på 0. Nu er den grundlæggende teknik så at starte ved Start, sætte $ES(St) = 0$ og så beregne $EF(St) = ES(St) + 0 = 0$. Hvis ikke der er en fejl i præcedens-relationerne, vil der nu være mindst en knude, Q, hvor man kender EF for alle de umiddelbare forgængere.

Men så er $ES(Q)$ lig den maksimale værdi af EF taget over alle Q's umiddelbare forgængere:

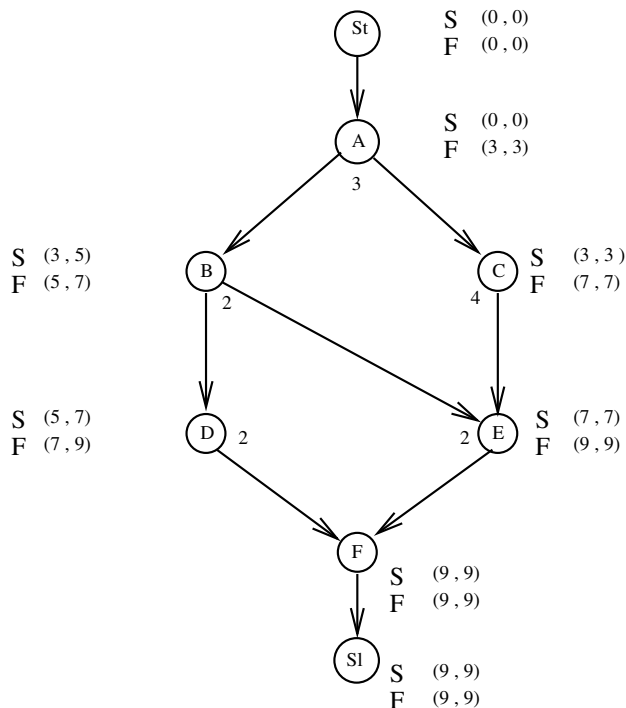
$$ES(Q) = \max_{P \text{ forgænger for } Q} \{EF(P)\}$$

$EF(Q)$ er så $ES(Q) + d(Q)$. Nu kan man så finde en ny knude til at spille rollen som Q, og til sidst ender man med at finde $ES(Sl)$, som så er den kortest mulige projektvarighed.

Med denne information kan man nu regne baglæns: $LF(Sl)$ sættes lig $EF(Sl)$, og nu beregnes $LS(Sl)$ som $LF - d(Sl)$ (hvilket igen er lig $EF(Sl)$). Og så kommer tricket: Der må nu være en knude Q, for hvilken man kender LS for samtlige umiddelbare efterfølgere. Q's seneste mulige sluttidspunkt $LF(Q)$, som ikke fører til projektforsinkelse, er nu minimum af LS over de umiddelbare efterfølgere for Q:

$$LF(Q) = \min_{P \text{ efterfølger for } Q} \{LS(P)\}$$

Så bliver $LS(Q)$ lig $LF(Q) - d(Q)$. Nu kan man ligesom før finde en ny knude til at spille rollen som Q, og til sidst ender man med at finde $LS(St)$, som så viser sig at være 0. På den efterfølgende figur ses resultatet af beregningerne for softwarevirksomhedens netværk. Projektet kan gennemføres på 9 måneder.



Det er nu sådan, at alle aktiviteter har fået tilknyttet værdier til ES, EF, LS og LF. Enhver aktivitet Q, der har tidligst starttidspunkt lig seneste starttidspunkt og tidligste sluttidspunkt lig seneste sluttidspunkt ($ES(Q) = LS(Q)$ og $EF(Q) = LF(Q)$), er *kritisk*: Hvis Q forsinkes, bliver det samlede projekt forsinket. Enhver kritisk knude ligger på en *kritisk vej* fra Start til Slut (der kan være flere sådanne veje). I det foreliggende projekt ligger aktiviteterne A, C og E på den kritiske vej.

For at forkorte projektet er man nødt til at forkorte varigheden af mindst et delprojekt på hver kritisk vej.

Den beskrevne metode er kendt som “the Critical Path Method” – CPM.

Projekter, der ikke ligger på en kritisk vej, kan tåle en vis forsinkelse. Dette kaldes *slack*. Den mest optimistiske form for slack er, når man forventer, at alle andre delprojekter er så hurtige som muligt. En aktivitet Q kan så starte så tidligt som muligt til tiden $ES(Q)$ og slutte senest muligt til tiden $LF(Q)$. Slacket for delprojekt bliver så

$$LF(Q) - ES(Q) - d(Q).$$

Hvis det undervejs i beregningerne sker, at man ikke kan finde en knude, hvor EF har fået en værdi for samtlige umiddelbare forgængere, er man jo på den. Men så er der en fejl i præcedens-relationerne: Der er nu en følge af delprojekter $Q_1, Q_2, \dots, Q_k, Q_1$, hvor hvert delprojekt forudsætter, at det umiddelbart foregående er gennemført. Konsekvensen er, at Q_1 forudsætter sig selv gennemført ...

Metodemæssigt bruger CPM to komponenter: Først foretages en såkaldt topologisk sortering. Knuderne V_1, \dots, V_n i et acyklisk netværk tildeles numre $N(v_1), \dots, N(v_n)$, så alle kanter i netværket går fra en knude med lavere nummer til en knude med højere nummer. St får nummer 1, og nu kan knuderne behandles i nummerrækkefølge, når ES og EF beregnes, og i omvendt nummerrækkefølge, når LF og LS beregnes. Selve beregningen af ES og EF er en såkaldt "longest path"-beregning i et netværk uden kredse ("acyklisk netværk") og er baseret på følgende: Tidligste starttidspunkt for Q, $ES(Q)$, er som tidligere nævnt lig maksimum af tidligste sluttidspunkt $EF(\cdot)$ over alle umiddelbare forgængere P til Q:

$$ES(Q) = \max_{P \text{ forgænger for } Q} \{EF(P)\}$$

Projektafkortning - hvordan?

Afkortning af projekter kan godt klares udelukkende ved at se på projektnetværket, men der er mere fikse metoder. Som nævnt er Operationsanalyse et område af anvendt matematik, der beskæftiger sig med bedst mulig udnyttelse af begrænsede ressourcer baseret på matematiske modeller til optimering af ressourceudnyttelse og profit.

Teknisk anvendes ofte *Matematisk Programmering*. Her modellerer man sit problem ved hjælp af såkaldte beslutningsvariable, en målfunktion og et sæt af ligninger og uligheder, der beskriver sammenhængene mellem de lovlige værdier af beslutningsvariablene. Ved hjælp af generelt software kan man nu finde den bedst mulige løsning til det relevante problem. Der findes flere softwarepakker på markedet, bl.a. CPLEX fra firmaet ILOG.

Ved projektplanlægning er det interessante selvfølgelig, hvornår hver enkelt delopgave kan starte. For at bygge en matematisk model for planlægningsproblemet indføres derfor en variabel y_Q for hver aktivitet Q. Værdien af y_Q skal i den sidste ende give starttidspunktet for aktivitet Q, og definitionsmængden er derfor de ikke-negative reelle tal. Vi indfører også en variabel x_Q , der skal fortælle, hvor meget aktivitet Q skal forkortes – ligesom y_Q skal x_Q være et ikke-negativt tal. Varigheden af aktiviteten Q er nu den normale varighed minus forkortelsen: $d(Q) - x_Q$. Hvis P er en umiddelbar efterfølger for Q, skal der så gælde: Starttid for Q plus varighed for Q er mindre end starttid for P:

$$y_Q + (d(Q) - x_Q) \leq y_P \Leftrightarrow y_P - y_Q + x_Q \geq d(Q)$$

Der bliver sådan en ulighed for hver forgængerrelation. Endvidere skal $x_Q \leq u(Q)$ for at sikre, at vi ikke forkorter for meget. Målfunktionen Z bliver summen af alle aktiviteter Q_1, \dots, Q_n af crash enheds-omkostningen for hver aktivitet multipliceret med forkortelsen:

$$Z = c(Q_1)x_{Q_1} + \dots + c(Q_n)x_{Q_n}$$

Nu er problemet så at minimere Z under de givne betingelser og med en øvre grænse på starttiden for Slut: $y_{\text{Slut}} \leq K$, hvor K er den seneste sluttid for projektet. CPLEX er som nævnt et eksempel på software, der kan finde løsningen til den slags modeller.

Man behøver i denne modelleringsproces ikke at inkludere de kunstige aktiviteter Start og Slut. De aktiviteter, der ingen forgængere har, bliver i modellen ikke underlagt betingelser mht. starttidspunkt. Nedenfor ses den matematiske programmeringsmodel for eksemplet, når man vil begrænse den samlede projektvarighed til 7 måneder.

```

\Problem name: CPM.lp
Minimize
obj: 10 xA + 2 xB + 5 xC + 2 xD + 2 xE
Subject To
yB - yA + xA >= 3
yC - yA + xA >= 3
yD - yB + xB >= 2
yE - yB + xB >= 2
yE - yC + xC >= 4
yF - yD + xD >= 2
yF - yE + xE >= 2
Bounds
xA <= 1
xB <= 1
xC <= 2
xD <= 1
xE <= 1
yF <= 7
End

```

Når modellen løses med CPLEX, fås følgende output. Her kan man se, at prisen for forkortelse bliver 70.000 kr., og at det bliver aktiviteterne C og E, der forkortes med hver 1 måned.

```

Problem 'CPM.lp' read.
Read time = 0.01 sec.
Tried aggregator 1 time.
LP Presolve eliminated 3 rows and 7 columns.
Aggregator did 4 substitutions.
All rows and columns eliminated.
Presolve time = 0.00 sec.
Dual simplex - Optimal: Objective = 7.0000000000e+00
Solution time = 0.00 sec. Iterations = 0 (0)
Variable Name          Solution Value
xC                      1.000000
xE                      1.000000
yB                      3.000000
yC                      3.000000
yD                      5.000000
yE                      6.000000
yF                      7.000000
All other variables in the range 1-11 are 0.

```



Mandskabsdimensionering

På S-tog's skinnenet køres der intensivt i myldretiderne morgen og aften og mindre intensivt tidligt om morgenen, midt på dagen og sent om aftenen. Dette passer dårligt med arbejdsdage på 7 timer for mandskabet: Når morgenmyldretiden er slut, står man med et overskud af mandskab til de efterfølgende timer. Ved den langsigtede planlægning er det nødvendigt at kunne vurdere, hvor meget personale der er brug for.

Et simpere eksempel på problemstillingen er følgende:

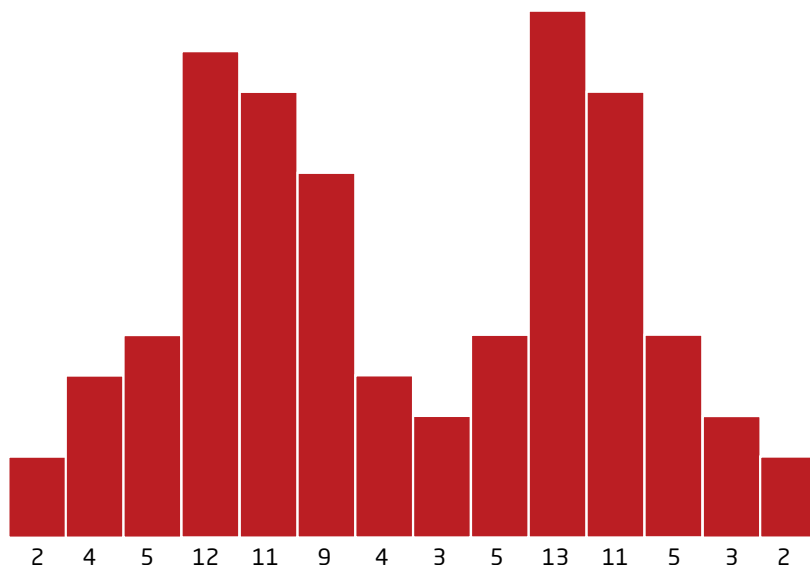
Tabellen og figuren viser behovet hen over en arbejdsdag mht. personer:

Time	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Behov	2	4	5	12	11	9	4	3	5	13	11	5	3	2

Tabel 1. Behov for antal personer pr. time på en arbejdsdag.

De ansatte har en 7 timers arbejdsdag. Hvor mange personer skal der til for at dække behovet, og hvornår skal de møde ind?

Hvis man fokuserer på løsning af problemet, kan man godt komme igennem med sund fornuft: Der skal ikke starte nogen i perioderne 14, ..., 19 - det er klart spild, da de så er på arbejde efter kl. 19, hvor der ikke er noget behov. Der må være en optimal løsning, hvor der ikke startes mere end 2 personer kl. 6 og 2 personer kl. 13. Hvis man starter flere, vil der være arbejdskraft tilovers både i første og sidste periode.



Figur 1. Behov for antal personer pr. time på en arbejdsdag.

De "ekstra" personer kan man lige så godt starte kl. 7 og kl. 12 – så kan det være, at deres arbejdskraft kan udnyttes bedre. Altså: Hvis man starter 2 personer kl. 6 og 2 personer kl. 13, har man ikke brugt flere personer end højst nødvendigt. Nu fratrækkes 2 fra hvert af behovene i timerne 6, ..., 12 og timerne 13, ..., 19. Så er behovet dækket i ydertimerne, og man har fået et nyt problem, der har to færre perioder. Det kan man så behandle på samme måde. Teknikken kaldes *dynamisk programmering*.

Man kan i stedet bygge en matematisk model af sit problem: Beslutningsvariable bliver så x_6, x_7, \dots, x_{13} , der angiver, hvor mange der skal møde ind hver tidsperiode. Variablene må kun antage ikke-negative heltallige værdier. Vi skal nu minimere det samlede personforbrug:

$$Z = x_6 + \dots + x_{13}$$

Samtidig skal vi sørge for, at behovet i de enkelte timer dækkes. Periode 10 dækkes af enhver, der er startet i periode 6, 7, 8, 9 eller 10. Derfor skal vi kræve, at $x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 11$. Der bliver en tilsvarende ulighed for hver tidsperiode. Endelig skal vi kræve, at alle beslutningsvariable er ikke-negative og heltal. Den fuldstændige model kommer til at se sådan ud:

```

\Mandag.lp
minimize
obj: x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13
s.t.
c6: x6 >= 2
c7: x6 + x7 >= 4
c8: x6 + x7 + x8 >= 5
c9: x6 + x7 + x8 + x9 >= 12
c10: x6 + x7 + x8 + x9 + x10 >= 11
c11: x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 >= 9
c12: x6 + x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 >= 4
c13: x7 + x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 >= 3
c14: x8 + x9 + x10 + x11 + x12 + x13 >= 5
c15: x9 + x10 + x11 + x12 + x13 >= 13
c16: x10 + x11 + x12 + x13 >= 11
c17: x11 + x12 + x13 >= 5
c18: x12 + x13 >= 3
c19: x13 >= 2
Bounds
x6 <= 13
x7 <= 13
x8 <= 13
x9 <= 13
x10 <= 13
x11 <= 13
x12 <= 13
x13 <= 13
Integer
x6 x7 x8 x9 x10 x11 x12 x13
end

```

Løsningen til problemet leveres af CPLEX og ser sådan ud:

MIP - Integer optimal solution: Objective = 2.3000000000e+01

Variable Name	Solution Value
---------------	----------------

x6	5.000000
----	----------

x9	7.000000
----	----------

x10	6.000000
-----	----------

x11	2.000000
-----	----------

x12	1.000000
-----	----------

x13	2.000000
-----	----------

All other variables are 0.

Læg mærke til, at der faktisk starter 5 personer på arbejde kl. 6. Da vi ved, at der findes en optimal løsning, hvor der starter præcis 2 personer kl. 6, er der altså flere optimale løsninger til problemet.

Men hvad nu hvis fagforeningen kun vil acceptere, at der startes arbejdere på 3 tidspunkter i stedet for de foreslåede 6? Her er det noget sværere at bringe den sunde fornuft i spil i problemløsningen. Det er noget lettere med en model: Vi indfører beslutningsvariable y_6, \dots, y_{13} , som skal afspejle, om der starter nogle medarbejdere på deres 7-timers dag i hver af timerne 6, ..., 13. Variablene er *binære*, de kan kun antage værdierne 0 eller 1. Værdien 0 betyder "ingen starter", 1 betyder "det er OK, at der starter folk i denne time". For time 6 tilføjes så begrænsningen

$$x_6 \leq 13y_6 \Leftrightarrow x_6 - 13y_6 \leq 0,$$

og tilsvarende begrænsninger føjes til for timerne 7, ..., 13. Hvis nu y_6 er 0, kan der ikke starte nogen på arbejde i time 6, idet x_6 så bliver tvunget til at være 0 (husk at x_6 skal være et ikke-negativt heltal). Hvis y_6 er 1, kan der starte op til 13 medarbejdere. Til sidst tilføjes så begrænsningen

$$y_6 + \dots + y_{13} \leq 3,$$

som udtrykker, at der højst må startes arbejdere på 3 tidspunkter. Modellen ser nu sådan ud:

\Mandag.3.lp

minimize

obj: $x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13}$

s.t.

c6: $x_6 \geq 2$

c7: $x_6 + x_7 \geq 4$

c8: $x_6 + x_7 + x_8 \geq 5$

c9: $x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 12$

c10: $x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 11$

c11: $x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \geq 9$

c12: $x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \geq 4$

c13: $x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 3$

c14: $x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 5$

c15: $x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 13$

c16: $x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 11$

c17: $x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 5$

c18: $x_{12} + x_{13} \geq 3$

c19: $x_{13} \geq 2$

$x_6 - 13y_6 \leq 0$

$x_7 - 13y_7 \leq 0$

$x_8 - 13y_8 \leq 0$

$x_9 - 13y_9 \leq 0$

$x_{10} - 13y_{10} \leq 0$

$x_{11} - 13y_{11} \leq 0$

$x_{12} - 13y_{12} \leq 0$

$x_{13} - 13y_{13} \leq 0$

$y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} + y_{13} \leq 3$


```

Bounds
x6 <= 13
x7 <= 13
x8 <= 13
x9 <= 13
x10 <= 13
x11 <= 13
x12 <= 13
x13 <= 13
Integer
x6 x7 x8 x9 x10 x11 x12 x13
Binary
y6 y7 y8 y9 y10 y11 y12 y13
end

```

Resultatet af modellens løsning med CPLEX ses nedenfor og viser, at man godt kan klare sig med 23 medarbejdere, selvom der kun er 3 mødetidspunkter. Der skal møde 10 medarbejdere kl. 6, 2 kl. 9 og 11 kl. 13.

MIP - Integer optimal solution: Objective = 2.3000000000e+01

Variable Name	Solution Value
---------------	----------------

x6	10.000000
----	-----------

x9	2.000000
----	----------

x13	11.000000
-----	-----------

y6	1.000000
----	----------

y9	1.000000
----	----------

y13	1.000000
-----	----------

All other variables are 0.

En undersøgelse af, om man kan klare sig med 2 mødetidspunkter, er nem:

$$y_6 + \dots + y_{13} \leq 3$$

ændres til

$$y_6 + \dots + y_{13} \leq 2,$$

og CPLEX aktiveres. Resultatet er "infeasible problem", altså at 2 mødetidspunkter ikke er nok.

Afslutning

Projektplanlægning og mandskabsdimensionering er gode eksempler på, hvordan matematiske modeller – her grafmodeller og matematiske programmeringsmodeller – kan hjælpe med overblik og ressourceoptimering. Udfordringen med at løse det foreliggende problem flyttes til at konstruere en model for problemet i den relevante ramme – så varetages selve løsningen af modellen af special-software.

Der er mange andre problemstillinger, der med fordel kan håndteres med teknikker fra Operationsanalyse. I dag bruger alle luftfartsselskaber og mange togselskaber teknikkerne i deres planlægning af arbejdsdage for personalet og driftsmønstrene for fly



Trafikken i og over lufthavnene i verdens storbyer er nu så omfattende, at kødannelse er normen. Passager og fragt kæmper med flaskehalse som begrænset startbanekapacitet og et tæt besat luftrum. Ved at indarbejde stadigt mere avancerede operationsanalytiske metoder til bemanning af gates, strategisk ruteplanlægning samt mandskabsplanlægning kan flyselskaber og lufthavne bekæmpe flaskehalsene.

og tog. Banker anvender metoderne i porteføljeoptimering, dvs. hvordan midler skal investeres for at opnå det bedst mulige afkast med den mindst mulige risiko, og transportselskaber bruger teknikker til at optimere deres rutelægning, når kunder skal besøges. Eلسkaber optimerer produktionen i forhold til efterspørgslen, internationale produktionsvirksomheder tilrettelægger produktionen i relation til efterspørgsel og produktionsvilkår i forskellige lande, og der optimeres på råvareudnyttelse i fødevarerindustrien. Matematisk modellering i forbindelse med planlægning og produktion er med andre ord et værktøj, der kommer til at spille en større og større rolle, efterhånden som ressourcerne bliver knappere.

Artiklens forfatter



Professor og chefanalytiker Jens Clausen



Logik, computere og kunstig intelligens



Med anvendt matematik tænkes almindeligvis på udvikling af matematiske modeller, der direkte bringes i anvendelse uden for matematikken. Det kan f.eks. være opstilling af en matematisk model for vindforløbet omkring en vindmøllelevning med henblik på optimering af vingens evne til at omdanne vindenergi til elektrisk energi. Sådanne modeller vil ofte danne grundlag for beregning på computere med et stort antal beregningsoperationer og tilhørende numeriske (talberegningmæssige) overvejelser over nøjagtighed af resultatet.

Dette kapitel handler ikke om *anvendt matematik* vedrørende fysiske systemer, men derimod om *anvendt logik* og specielt, hvordan logik udmøntes på computere især i form af såkaldte logik-programmeringssprog. Anvendt logik må her ikke forveksles med, at computerens kredse i sig selv virker efter logiske principper, hvori der regnes med to værdier 0 og 1 eller falsk og sand. Her beskæftiger vi os med, hvordan udsagn om et anvendelsesområde formuleret logisk kan behandles i computeren og tjene til at ræsonnere logisk om forhold i samme anvendelsesområde.

Hvad er logik?

Logik er læren om at ræsonnere i dagligdagen og i videnskaberne. Dermed anvendes logik både inden for praktiske fagområder såsom jura og medicin samt i abstrakte videnskaber som matematik. Logikkens arbejdshypotese er, at der findes generelle kerneprincipper for ræsonnering, der er fælles for alle fagområder. Det er logikkens hovedopgave at afdække og formulere disse principper for korrekt ræsonnering og specielt at udmønte dem i ræsonneringslove i form af slutningsregler. Dette er i parallel til de eksakte naturvidenskabers hovedopgave at afdække naturlovene og formulere disse præcist.

Dette er i lighed med matematikkens talbegreber og regneregler, der er universelt anvendelige og gyldige, uanset hvad vi tæller, når vi bruger matematikken. Principperne for ræsonnering og disses realisering på computer er hovedemnet i dette kapitel. Computeraspektet er så væsentligt, at vi kalder logikken for datalogisk logik eller blot "datalogik" (eng. computational logic). Matematisk logik er derimod specielt læren om at ræsonnere om matematiske beviser og i bredere forstand læren eller filosofien vedrørende matematikkens grundlag.

Lidt historie

Logikken har en lang forhistorie tilbage til de gamle græske filosoffer og til middelalderens øvelser i argumentation. Sidstnævnte kunne af og til omhandle meget verdensfjern, spidsfindig argumentation vedrørende eksempelvis, hvor mange engle der kunne danse på spidsen af en knappenål! I det 19. århundrede beskrev George Boole i "Laws of Thought", hvordan man kunne slutte på udsagn ved at knytte tal til dem og dermed regne på dem. I det 20. århundrede har der været en kamp mellem matematikere og logikere. Matematikere har forsøgt at gøre logikken til en gren af matematikken, mens logikere har forsøgt at reducere hele matematikken til anvendt logik. Denne langvarige videnskabelige strid har været meget frugtbar for videreudvikling af logikken (og sikkert også matematikken). Specielt har den ledt til afgørende resultater angående logikkens begrænsede muligheder for at underlægge sig matematikken og gøre matematik til logik.

Siden fremkomsten af computere er der kommet nye spillere på banen, nemlig softwareingeniører inden for feltet datalogi. Det har nemlig vist sig, at logikken danner det teoretiske grundlag for al maskinel beregning, dvs. alt det, der kan udføres på computer. Hvis man vil studere computervidenskab i dag, så skal man tilegne sig logik helt på linje med, at beherskelse af faget fysik forudsætter godt kendskab til matematik.

Logik er regning med udsagn

Hvilke udsagn? – er den naturlige reaktion på denne overskrift. Og svaret er i sin ubeskedne form alle udsagn, uanset hvad de handler om, blot de rummer en påstand. Logikken behandler udsagn, der kan manipuleres meningsfuldt uden at kende meningen med udsagnene. Logikken manipulerer symboler ved hjælp af slutningsregler (også kaldet inferensregler). Den vigtigste af disse kan skrives

$$\frac{p \leftarrow q \quad q}{p}$$

hvor der er to udsagn over strengen og et resulterende udsagn under strengen. Det første udsagn $p \leftarrow q$ læses: " p hvis q ". Operatoren \leftarrow , som vi læser "hvis", kaldes omvendt implikation i logikken. Denne regel siger, at hvis vi har de to udsagn $p \leftarrow q$ og q , så slutter vi det nye udsagn p .

Eksempel: Lad der være givet "det er tirsdag i morgen", hvis "det er mandag i dag". Givet yderligere udsagnet "det er mandag i dag" slutter vi udsagnet "det er tirsdag i morgen" ved reglen ovenfor. Hvilke udsagn svarer til p og q ? Bemærk, at denne slutning ikke afhænger af sandhedsværdien af udsagnene. Om det faktisk er mandag i dag er ligegyldigt for slutningens logiske korrekthed.

Lad os generalisere denne slutningsregel til

$$\frac{p \leftarrow q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_n \quad q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n}{p}$$

som vi også kan skrive

$$\frac{p \text{ hvis } q_1 \text{ og } q_2 \text{ og } \dots \text{ og } q_n}{p} \quad q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n$$

Den første slutningsregel fremkommer nu som specialtilfælde ved at sætte $n = 1$, kan vi bemærke. Vi putter altså $n + 1$ udsagn ind i slutningsregneren og får 1 udsagn ud. Det lyder som en dårlig forretning. Men vi har naturligvis stadig de givne udsagn til rådighed, så vi får 1 udsagn ekstra, som vi kan bruge igen.

Eksempel: X er i Y hvis X er i Z og Z er i Y

Dette kan i formel logisk symbolik skrives $\forall X \forall Y (i(X, Y) \leftarrow \exists Z (i(X, Z) \wedge i(Z, Y)))$, hvor vi benytter alkvantoren \forall og eksistenskvantoren \exists , og hvor vi har indført prædikatet “i” for at være inden for noget.

Lad os supplere med udsagnene “København er i Danmark” og “Danmark er i Skandinavien”. Disse kan skrives

$i(\text{København, Danmark})$

$i(\text{Danmark, Skandinavien})$

- to udsagn af en enkel atomisk form, der kaldes logiske fakta.

Vi kan nu bruge det først givne udsagn med X , Y og Z til i et trin at slutte, eller som det kaldes i logikken, at inferere eller deducere:

København er i Skandinavien

Vi behøver blot at sætte $X = \text{København}$ og $Z = \text{Danmark}$ og $Y = \text{Skandinavien}$. Hvis vi gør det, får vi jo udsagnet “København er i Skandinavien”, hvis “København er i Danmark” og “Danmark er i Skandinavien”. Og dette udsagn kan vi bruge i slutningsreglen med $p = \text{“København er i Skandinavien”}$, $q_1 = \text{“København er i Danmark”}$ og $q_2 = \text{“Danmark er i Skandinavien”}$. Unægtelig ikke nogen dybsindig slutning, men kun en begyndelse til noget, der kan kræve et stort antal slutningstrin at udlede, som vi skal se eksempler på senere.

I logikken regner vi ikke meget på tal, men mere på data. I ovenstående udledning satte vi $X = \text{København}$ osv. Disse datamanipulationer er trættende for mennesker at udføre, så meget desto mere at (de fleste) mennesker kan slutte sig til det rigtige i dagligdagens overvejelser uden at gennemføre logikkens omstændelige manipulationer med symboler. Sandt at sige har logikkens praktiske anvendelighed været stærkt begrænset indtil for nylig.

Logik og computerberegning

Omkring 1970 skete der et gennembrud i forståelse af logik til computerberegning. Man havde allerede da på det rent teoretiske og spekulative plan skabt forbindelse mellem logiske slutninger og computerberegning, men i 1970'erne indså man, at logik i tilpasset form kunne bruges som computerprogrammeringssprog. Faktisk nåede man en erkendelse, der er endnu mere fundamental og vidtrækkende: Al computerberegning er i princippet logisk ræsonnering.

Så længe man “blot” bruger computeren til talberegninger, hvad enten det er videnskabelige eller finansielle udregninger, er denne indsigt uden særlig betydning og værdi. Men når man f.eks. bruger computere til databaser, er det en væsentlig erkendelse, at svar på databaseforespørgsler (databaseopslag) kan forstås som logiske udledninger af konsekvenser ved at opfatte databasens indhold som logiske fakta. Forståelsen af computerberegninger som logiske ræsonneringer etablerer logikken som det teoretiske grundlag for computervidenskab.

Logikken afklarer spørgsmålet om, hvad der overhovedet kan beregnes på computere, og giver metoder for ræsonnering om egenskaberne for computerprogrammer. Dermed er logikken kommet til at spille en rolle for computervidenskab, som er lig den matematiske analyses grundlag for fysikken.

Logik og databaser

Lad os vende tilbage til geografieksemplet ovenfor og tilføje information om naboskab (grænser) mellem stater. Lande med fælles grænse kan formuleres som følger

nabo(Danmark, Tyskland)
nabo(Sverige, Norge)
nabo(Sverige, Finland)
nabo(Finland, Rusland) osv.

Disse logiske fakta udgør en database. Hvis vi vil udtrykke en forespørgsel, kan vi gøre det med omvendt implikationsudsagn som benyttet ovenfor, f.eks. “nabotilSverige(X) hvis nabo(Sverige, X)”.

Her bør vi huske, at naboprædikatet er symmetrisk, dvs.

nabo(X,Y) hvis nabo(Y,X)

Vi kan nu udregne forespørgslen ved at efterlyse værdier for X. Formelt logisk sker det ved at bevise påstanden, at der findes et X så at “nabotilSverige(X)”. Ved at bruge vores generelle slutningsregel fås svaret $X = \text{Norge}$ sammen med $X = \text{Finland}$.

Vi kan også udtrykke, at to lande er indirekte naboer via et tredje land, f.eks. med nabotilnabotil(X,Z) hvis nabo(X,Y) og nabo(Y,Z) og forskellige(X,Z).

Dette lille eksempel illustrerer, at databaser, specielt relationsdatabaser, og forespørgsler til disse kan forstås logisk, hvilket kan udtrykkes med et slogan:

Datalogik = logik + computerberegning

Der er således en direkte sammenhæng mellem logik og databasesystemer. Og databasesystemer danner grundlaget for alle internetsteder med søgeoperationer, alle finansielle transaktioner og alle tele- og it-systemer.

Logikprogrammering

For at introducere til logikprogrammering fortsætter vi med endnu et eksempel inden for geografien, nemlig farvelægning af landkort.

Vi vil starte med landene i Norden: Danmark, Finland, Island, Norge og Sverige. Vi benytter bogstaverne D, F, I, N og S herfor.

Idéen er at farvelægge et landkort over Norden, således at lande, der grænser direkte op til hinanden, får forskellige farver. I denne forbindelse grænser Danmark og Sverige ikke direkte op til hinanden, da der er vand imellem Danmark og Sverige. Vi kan således udtrykke kravet til farvelægningen på følgende måde:

korrekte-farver hvis F -farve \neq N -farve og F -farve \neq S -farve og N -farve \neq S -farve.

Bemærk, at D -farve og I -farve ikke indgår.

Kravet er ovenfor udtrykt på en form for dansk under anvendelse af det matematiske symbol \neq ("forskellig fra"). Vi kan i stedet udtrykke kravet i logikprogrammeringssproget Prolog (vi benytter her Prolog således som defineret af standardiseringsorganisationen ISO). Det er her hensigtsmæssigt at kode \neq som prædikatet `diff` (eng. difference), og vi vil benytte engelske ord for farverne, da dette er nemmest i Prolog. Endvidere angives ordet "hvis" som `:-` og ordet "og" som komma.

I den første linje i logikprogrammet nedenfor udtrykkes, at kortet er farvelagt korrekt, hvis F og N har forskellig farve samt at F og S har forskellig farve samt yderligere at N og S har forskellig farve.

```
colorable :- diff(F,N), diff(F,S), diff(N,S).
```

```
diff(red,green).
```

```
diff(red,blue).
```

```
diff(green,red).
```

```
diff(green,blue).
```

```
diff(blue,red).
```

```
diff(blue,green).
```

Ovenfor er landebetegnelserne F , N og S nu variable (jvf. X , Y og Z ovenfor), der tillægges farveværdier ved udregning af logikprogrammet ved hjælp af vores slutningsregel. Prolog-systemet giver følgende svar:

```
Yes: colorable
```

Det er således tilstrækkeligt med 3 farver i eksemplet.

Det er også muligt at få computeren til at angive forslag til farverne på landene. Her er det dog nødvendigt at sikre sig, at også Danmark og Island får tildelt farver i løsningen. Dette gøres nemmest ved, at variabelen D begrænses til en af de 3 farver (kravet `color(D)` i det følgende program), og tilsvarende for de resterende variable F , I , N og S .

```
solution(D,F,I,N,S) :-
```

```
color(D), color(F), color(I), color(N), color(S),
```

```
diff(F,N), diff(F,S), diff(N,S).
```

```
diff(red,green).
```

```
diff(red,blue).
```

```
diff(green,red).
```

```
diff(green,blue).
```

```
diff(blue,red).
```

```
diff(blue,green).
```

```
color(red).
```

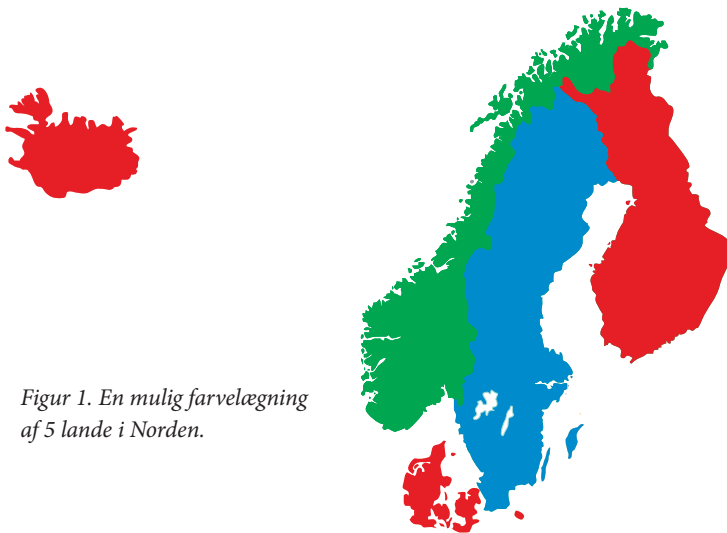
```
color(green).
```

```
color(blue).
```

Løsningerne fås i lighed med databaseeksemplerne i forrige afsnit ved hjælp af den tidligere givne slutningsregel. Her er den første af i alt 54 løsninger:

Yes: solution(red,red,red,green,blue)

Her er Danmark (D), Finland (F) og Island (I) tildelt farven rød, Norge (N) farven grøn og endelig Sverige (S) farven blå. Se figur 1.



Figur 1. En mulig farvelægning af 5 lande i Norden.

De resterende 53 løsninger udregnes og udskrives af Prolog på forlangende. Eksemplet med landene i Norden er ikke stort. Programmet kan udmærket udvides med flere lande, men det bliver hurtigt uoverskueligt at holde styr på de mange krav. Desuden er det besværligt at ændre, hvilke farver der ønskes benyttet. Det ville være nemmere blot et enkelt sted at angive listen af farver [red,green,blue]. Dette kan naturligvis også gøres i Prolog.

Logikprogrammering, især programmeringssproget Prolog, er et nyttigt værktøj til at løse matematik- og logikproblemer, da man skriver programmer ved at opstille en sammenhæng af logiske udsagn. Det er imidlertid også muligt at bruge Prolog til at udvikle store computersystemer, f.eks. til spil, databaser og internetapplikationer. En stor fordel ved logikprogrammering er, at anvendelsen af logik medfører et højere abstraktionsniveau, så avancerede programmer kan udvikles hurtigere og med et mere pålideligt resultat.

Logik og modeller

Vi benytter matematiske formler til at beskrive eksempelvis planetbevægelser, spredning af lydbølger og elektriske kredsløbs opførsel. Logiske formler er også et beskrivelsesværktøj, ligesom andre matematiske formler er det. Vi kan opfatte en mængde af logiske udsagn – det vi ovenfor kaldte en database – som en model af et stykke af verden. I eksemplet med farvning af landene havde vi en mængde af udsagn, som beskrev landenes indbyrdes beliggenhed. Denne mængde af udsagn giver en logisk beskrivelse af et stykke af vores virkelighed – og kan opfattes som en model af denne virkelighed.



Figur 2. Lille bord med bøger og mandarin.
(foto: Thomas Bolander)

Et andet eksempel på modellering af virkeligheden ved logiske formler er følgende. Betragt billedet i figur 2.

Dette lille stykke af verden kan beskrives ved følgende logiske udsagn:

- på(bord, store bog)
- på(store bog, lille bog)
- på(lille bog, mandarin).

Her bruger vi udsagn af typen på(X,Y) til at betegne, at Y ligger direkte oven på X. Sammenlign disse logiske udsagn med naboudsagnene i afsnittet om logik og databaser. Strukturen er naturligvis den samme, vi benytter blot i stedet udsagnene til at repræsentere den verden, som består af objekterne på det lille bord (bøger og en mandarin) samt relationerne mellem disse objekter (deres placering i forhold til hinanden).

Det logiske sprog kan altså lige så vel bruges til at beskrive relationerne mellem objekterne på bordet som naborelationer mellem lande. De to eksempler er forholdsvist simple og relativt ens. De antyder dog alligevel, at vi kan bruge mængder af udsagn til at beskrive en lang række forskelligartede egenskaber ved verden. Disse mængder af logiske udsagn kan opfattes som modeller af de pågældende dele af verden. Eksempelvis udgør de 3 udsagn ovenfor en simpel matematisk model af den verden, som er repræsenteret i figur 2.

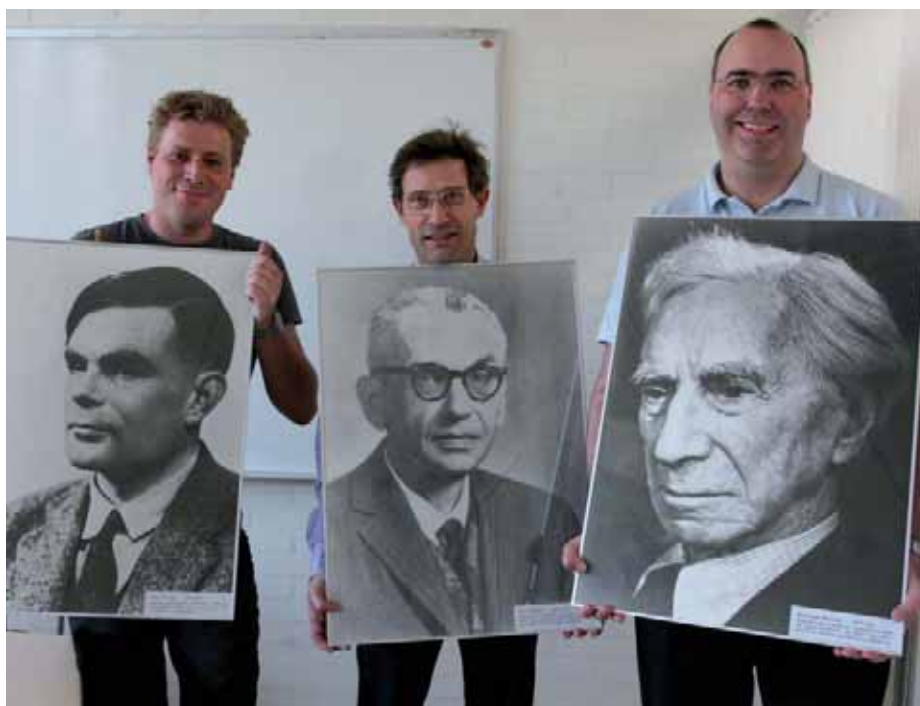
Logikkens grænser

Hvor meget af verden kan vi beskrive med logiske udsagn? Er det en særlig begrænset del af verden, særlige typer af egenskaber ved verden, eller er der måske ingen grænser? Man kunne starte med at være optimistisk og forestille sig, at der ingen grænser er, så hele verden kan beskrives med logiske udsagn. Lad os prøve at lege lidt med dette tankeeksperiment. Vi forestiller os altså, at vi kan skabe en mængde af logiske udsagn, som giver en model af hele verden. Lad os kalde denne mængde af logiske udsagn for L. L er naturligvis selv en del af verden, så hvis L er en model af hele verden, må en del af L altså udgøre en model af L selv. L er således i en vis forstand indeholdt i sig selv. Dette er naturligvis en ret abstrakt tanke, så lad os prøve at starte med at give en lidt simplere analogi.



Figur 3, 4 og 5.
(foto: Thomas Bolander)

Figur 3 forestiller et kollegieværelse. Lad os antage, at vi ønskede at friske værelset lidt op med et stort billede på den grå opslagstavle. Hvis vi var lidt fantasiløse (eller måske netop ikke), kunne vi få den tanke at ophænge et billede, som forestillede kollegieværelset selv. Vi kan tænke på et sådan billede af værelset som en model af værelset. I første omgang ville vi måske tro, at det var nok at tage et foto af kollegieværelset og hænge det op på opslagstavlen. Resultatet af at gøre dette er illustreret i figur 4. Men billedet på opslagstavlen er faktisk ikke et billede af kollegieværelset selv, det er kun et billede af kollegieværelset, som det så ud, før billedet blev hængt op. Det, der er forkert, er, at billedet på opslagstavlen indeholder en tom opslagstavle – ikke en opslagstavle med et billede på. For at få et billede, som korrekt repræsenterer hele kollegieværelset – inklusive billedet selv – bliver vi nødt til at udfylde det grå område med endnu en kopi af værelset. Og denne proces bliver vi nødt til at fortsætte, indtil vi til sidst ender med situationen i figur 5. På figuren har vi uendeligt mange kopier af værelset indlejret i hinanden.



Artiklens forfattere med fotos af berømte matematikere og logiske tænkere. Fra venstre lektor Thomas Bolander med et foto af den engelske matematiker Alan Turing (1912-1954), professor Jørgen Fischer Nilsson med et foto af den østrigske matematiker Kurt Gödel (1906-1978) og lektor Jørgen Villadsen med et foto af den engelske logiker og filosof Bertrand Russell (1872-1970).

Løgner-paradokset

Samme overraskende fænomen opstår, når vi igennem logiske udsagn forsøger at skabe en model af en verden, som indeholder modellen selv, altså hvis vi eksempelvis forsøger

at skabe en model af *hele* verden. Det er dog ikke nødvendigvis et stort problem i sig selv. En uendelig række af modeller indlejret i hinanden kunne man vel leve med, men det bliver faktisk værre endnu. Hvis en logisk model indeholder en model af sig selv, giver man den mulighed for at tale om sig selv, dvs. udtrykke egenskaber ved sig selv. Det leder til det, man kalder selvreference, som er notorisk problematisk. Et af de simpleste eksempler opstår i det såkaldte løgner-paradoks. Løgner-paradokset opstår ved at betragte følgende selvrefererende sætning:

“Denne sætning er falsk”.

Problemet er, at uafhængigt af om vi antager, at sætningen er sand eller falsk, ledes vi til en modstrid. Antag først, at sætningen er sand. Hvis den er sand, er det, den siger, korrekt. Men sætningen siger, at den er falsk, altså må den så være falsk. Men hvis vi antager, den er falsk, kan det, den udtrykker, ikke være sandt. Det vil sige, det er ikke sandt, at den er falsk. Og så må den altså alligevel være sand. Men det kunne den jo ikke, for hvis vi antog, at den var sand, fandt vi ud af, at den måtte være falsk.

Vi har ingen chance for at undslippe en sådan modstrid. Situationen kaldes derfor et paradoks. Det specielle ved løgner-paradokset er, at det er bygget på en sætning, som refererer til sig selv, nemlig sætningen “Denne sætning er falsk”. Når logiske systemer modellerer sig selv, får de en tilsvarende mulighed for at referere til sig selv, og dermed løber de ind i problemer svarende til løgner-paradokset.

Logik og naturlige tal

Nu behøver man måske ikke tage tingene alt for tungt. Hvor tit vil vi overhovedet være interesseret i at skabe logiske modeller, som kan modellere sig selv? Umiddelbart ville man måske tro, at dette skulle være meget sjældent, men det viser sig at optræde ganske ofte. En af de ting, man kan bruge logiske udsagn til at beskrive, er aritmetik, dvs. læren om egenskaber ved de naturlige tal (0, 1, 2, 3 osv.). Man kan altså skabe en model af de naturlige tal og deres egenskaber igennem en række logiske udsagn. Blandt de logiske udsagn, som er nødvendige for at beskrive egenskaberne ved de naturlige tal, finder man bl.a. følgende:

$$0 = 0$$

$$X + 0 = X$$

$$X + 1 \neq 0$$

$$X = Y \text{ hvis } X + 1 = Y + 1$$

Her betyder eksempelvis $X + 0 = X$, at ethvert tal adderet til 0 giver tallet selv. Umiddelbart skulle man ikke tro, at der kunne opstå problemer ved at give en logisk beskrivelse af de naturlige tal. Vi forsøger at skabe en model af de naturlige tal, men denne model indeholder vel ikke en model af sig selv, eftersom naturlige tal ikke i sig selv er logiske udsagn? Det problem, der imidlertid opstår, er, at vi faktisk kan bruge tal til at sige noget om logiske udsagn. Helt simpelt kunne vi f.eks. vælge at opstille alle logiske udsagn på en række, og hvert logisk udsagn ville da få tilknyttet et tal svarende til, hvilket nummer

det havde i rækken. Dermed kunne vi opfatte et symbol '5' som ikke kun refererende til tallet 5, men også til et udsagn, nemlig det 5. udsagn i rækken. Pludselig vil man så kunne benytte logiske udsagn indeholdende tal til at snakke om andre logiske udsagn, idet man kan opfatte tallene som refererende til andre udsagn. Og i sidste instans kan man så også få udsagn til at referere til sig selv, hvormed vi havner i problemerne omkring selvreference og paradokser nævnt ovenfor.

Disse tanker og idéer går tilbage til en af det 20. århundredes største matematikere, Kurt Gödel. Han beviste, at enhver logisk beskrivelse, som indeholder aritmetik, vil være ufuldstændig, altså kun give en ufuldstændig model af det, den forsøger at modellere. Måden, han beviser det på, er at vise, at hvis den logiske beskrivelse havde været fuldstændig, da ville modellen indeholde en model af sig selv og dermed give anledning til, at man kunne formulere et selvrefererende paradoks i stil med løgner-paradokset. Givet eksemplet med kollegieværelset ovenfor er det måske forventeligt, at det kan være problematisk at have modeller, som indeholder modeller af sig selv. Mere overraskende er, at der ikke skal mere end en logisk beskrivelse af de naturlige tal til, før man havner i denne problemstilling. Kurt Gödels resultat er kendt som Gödels Ufuldstændighedssætning, og det er en af de mest berømte matematiske sætninger fra det 20. århundrede.

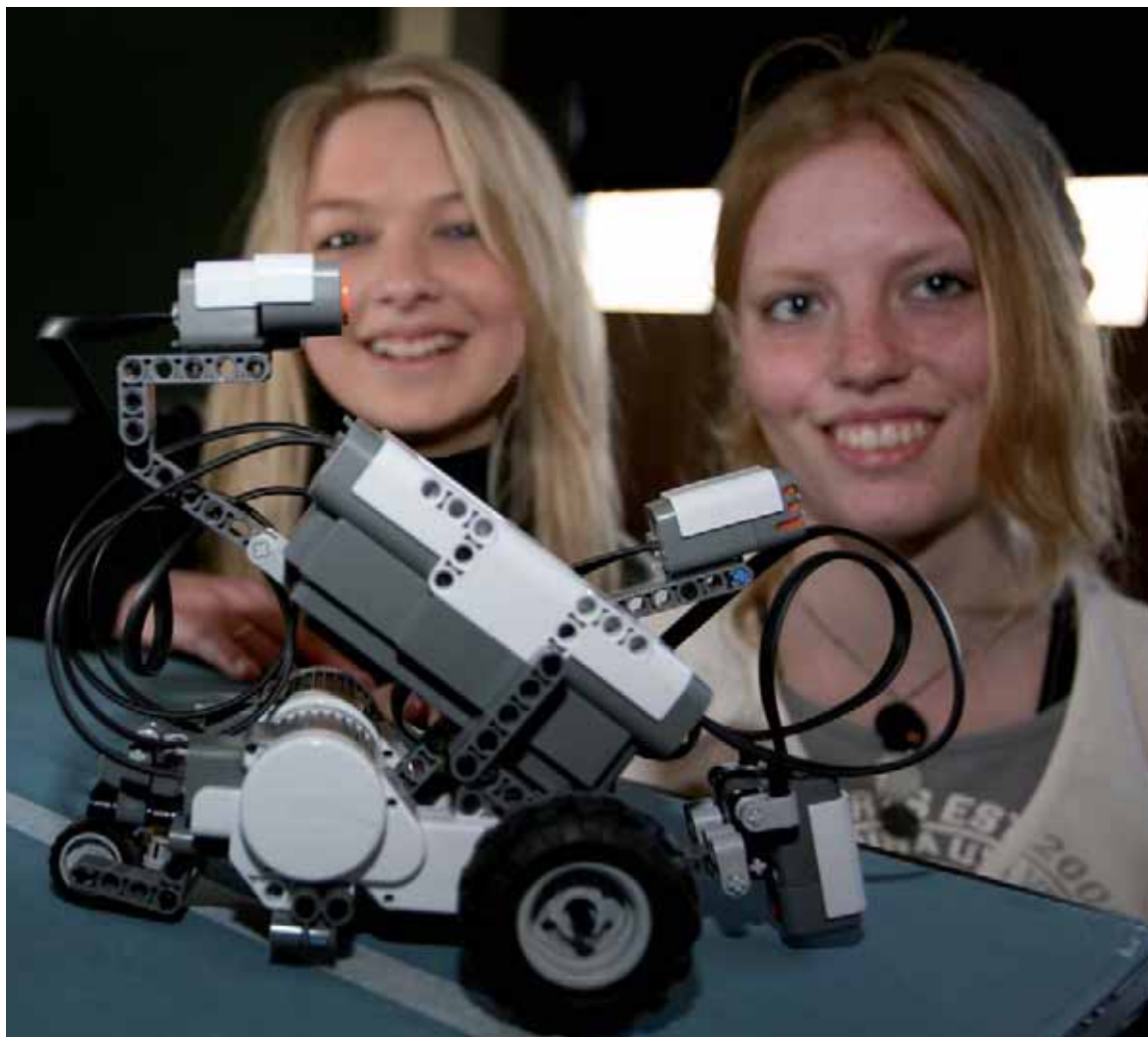
Logik og kunstig intelligens

Tankegangen med at skabe logiske modeller af verden er også central i kunstig intelligens. I kunstig intelligens ønsker man at skabe computerprogrammer eller robotter, som kan tænke selv, lægge planer, træffe beslutninger, handle på egen hånd, lære af sine fejl, kommunikere med andre osv. Her spiller "modelbygning" en central rolle. Vi mennesker har indbygget en "model" af verden, som vi bruger som grundlag for at beslutte, hvilke handlinger vi vil foretage os. Vi bruger vores model af verden til at forudsige konsekvensen af forskellige mulige handlinger og vælger herudfra, hvilke handlinger vi vil foretage. Eksempelvis ville de færreste mennesker vælge at slippe en 1.000-kroners seddel ud over kanten af Rundetårn. Vores model af verden fortæller os, at sedlen næppe vil blive hængende i luften, så vi bare kan tage den ind igen, når vi har lyst. Modellen fortæller os tværtimod, at sedlen på grund af en kombination af tyngdekraft og vind givetvis vil forsvinde for altid. Modellen af den fysiske verden, som omgiver os, tillader os at agere intelligent i verden. Uden denne model ville vi ikke have nogen anelse om, hvad konsekvensen af forskellige handlinger ville være, og vi ville dermed ikke kunne tage de rigtige beslutninger. At vi ikke forsøger at gå ind i et rum ved at passere direkte gennem en væg er f.eks. også en konsekvens af, at vi har den indbyggede model af verden. Mennesker vil i stedet lede efter en dør, som vi kan åbne.

Vores model af verden fortæller os også, at en normal dør enten kan åbne udad eller indad, så vi vil formodentlig prøve begge dele, inden vi giver op. En person, som kun forsøger at åbne døren den ene vej og med det samme giver op, hvis det ikke lykkes, virker naturligvis ikke særlig intelligent. Tilsvarende virker det heller ikke særlig intelligent at forsøge at komme ind i et rum ved at passere direkte gennem væggen. Altså er vores model af verden en central komponent i intelligent ageren.

Roboters intelligens

Givet at modeller således er centrale for den menneskelige intelligens, opstår der naturligt følgende spørgsmål: Hvordan kan vi udstyre robotter med samme evne til at opbygge og udnytte modeller af verden? Her kommer logikken og logiske udsagn igen ind i billedet. Vi har set, at logiske udsagn er meget velegnede til at danne beskrivelser (modeller) af dele af verden. Det ville derfor være oplagt at tænke på, om man ikke kunne udstyre robotter med en evne til at håndtere logiske udsagn med henblik på at kunne beskrive og ræsonnere omkring verden. Og det kan man. Netop denne tilgang



Gymnasieelever på besøg på Danmarks Tekniske Universitet. De to piger ses med en robot fra iMARS-laboratoriet på DTU Informatik. Her eksperimenteres med systemer af robotter, som samarbejder om at løse komplicerede opgaver.

til kunstig intelligens udgør den ene af de to store paradigmer (retninger) inden for kunstig intelligens, det såkaldte symbolske paradigme. Idéen er her, at en robot eksempelvis vil kunne repræsentere verden bestående af det lille bord (figur 2) ved hjælp af de logiske udsagn, vi introducerede ovenfor. Hvis robotten ønskede at få fat i den store bog, ville den da ved hjælp af de logiske udsagn kunne ræsonnere sig frem til, at den blev nødt til at fjerne mandarinen og den lille bog først. Man kan også uden videre give logiske beskrivelser, som fortæller, at man ikke kan passere gennem vægge, og at en dør kan åbne enten indad eller udad. Hvis en robot har tilstrækkeligt mange logiske udsagn, som fortæller, hvordan verden hænger sammen, vil den da via ræsonnering med disse logiske udsagn kunne udvise intelligent opførsel. Den vil også kunne lære nye ting om verden og repræsentere disse ting ved nye logiske udsagn.

Det viser sig hurtigt, at intelligent opførsel i den virkelige verden ikke kun kræver en evne til at modellere "døde ting" som mandariner, bøger, vægge og døre. For at vi mennesker kan agere intelligent i forhold til hinanden, kommunikere og samarbejde, bliver vi nødt til også at have dannet mentale modeller af hinanden. Manglende evne til at sætte sig ind i andres situation og forudsige andres tanker og handlinger karakteriserer bl.a. autister, og denne tilstand er naturligvis stærkt hæmmende, når man skal opnå relationer til andre mennesker.

Når man designer kunstig intelligens-systemer og gerne vil opnå så høj grad af intelligent opførsel som muligt, skal man selvfølgelig tage disse ting i betragtning. Hvis en robot skal kunne interagere fornuftigt med mennesker eller andre robotter, bliver den nødt til også at være i stand til at skabe delvise modeller af disse andre mennesker eller robotter. Der arbejdes i dag ihærdigt på at skabe robotter, som via logiske systemer kan modellere ikke kun de "døde ting", men også andre handlende væsener og deres tanker. Der er imidlertid givetvis meget lang vej igen, inden vi opnår noget, der på nogen som helst måde kan måle sig med menneskelig intelligens.

Artiklens forfattere



Lektor Thomas Bolander



Professor Jørgen Fischer Nilsson



Lektor Jørgen Villadsen



Matematisk modellering af klima og energi

Af Ph.d.-studerende Peder Bacher, DTU Informatik

Menneskeheden har de sidste mange tusinde år været afhængig af at kunne producere energi for at kunne opvarme vores boliger, lave mad, få lys og meget mere. Det har været nemmest at producere energien ved at afbrænde materialer og udnytte den varme, der dannes ved afbrændingen. I forhistorisk tid brændte vi udelukkende træ, men allerede for titusinde år siden fandt mennesket ud af at afbrænde kul, og denne energikilde er sammen med olie for alvor kommet i anvendelse i de sidste par hundrede år.

Foreløbigt har strategien med at afbrænde fossile energikilder været vellykket, og vi har oplevet voldsomme forbedringer i vores levevilkår, fordi vi nemt og billigt har kunnet producere enorme mængder af energi. De positive effekter har indtil nu overskygget de negative effekter, men klodens voksende befolkning bruger nu mere energi end nogensinde tidligere, og det bliver efterhånden mere besværligt og kostbart at finde og udvinde nye forekomster af kul, gas og olie. Desuden tvinger klimaændringer, som med stor sikkerhed følger af forbrændingen af kul og olie, os til at finde nye bæredygtige metoder til at producere energi. Der er behov for hurtig omstilling, og heldigvis har vi allerede udviklet en del bæredygtige teknologier.

Energiproduktion fra bl.a. vindmøller og solceller er på vej til at blive lige så billig som produktion med kul og olie. I Danmark producerer vi allerede mellem 15 og 20 % af elektriciteten med vindmøller, hvilket foreløbigt dog kun er mellem 2 og 3 % af det samlede energiforbrug. For at gøre den andel større er der nogle markante udfordringer, som skal overvindes, og det er bl.a. disse udfordringer, som dette kapitel belyser.

Lagring og produktion af energi fra sol og vind

Et stort problem med solceller og vindmøller er, at energien kun bliver produceret, når solen skinner, eller når vinden blæser. Det er modsat for energiproduktion med kul og olie, som er meget nemmere at styre. Så hvis man forestiller sig, at vi udelukkende producerede energi med sol og vind, så ville der simpelthen ikke altid være strøm i kontakterne. Problemet kan grundlæggende løses på to måder:

- ved at lagre noget af sol- og vindenergien,
- ved at få energiforbruget til at følge energiproduktion.

Der forskes i mange teknologier til at lagre energi. Det er f.eks. idéen bag "brintsamfundet". Her vil man danne brint, når sol- og vindenergiproduktionen er høj, og efterfølgende lave elektricitet med brinten, når der mangler energi. Man kan også lagre energien på andre måder, f.eks. i bilbatterier, der er tilsluttet til opladning. Tilsvarende forskes der i teknologier, som kan gøre energiforbruget mere fleksibelt, så det kan følge energiproduktionen. For eksempel kan man indbygge "intelligent" styring i vaskemaskiner, så de starter, når vejrudsigten viser, at der er høj vindenergiproduktion de næste to timer. Som det ser ud nu, så kan problemet ikke løses med en enkelt teknologi. Noget af energien skal lagres med forskellige teknologier, og energiforbruget skal gøres mere fleksibelt, der hvor det kan lade sig gøre.

Her kommer matematisk modellering på banen som et fuldstændigt genialt og uundværligt værktøj. Der er grundlæggende to forskellige typer spørgsmål, der er interessante at undersøge med modellering. For det første om man kan modellere, hvordan hele energiforsyningen vil se ud, hvis nye teknologier bliver taget i brug. For eksempel finde svar på spørgsmål som:

- Hvor stor en andel kan vindenergien dække, før vi risikerer strømsvigt nogle gange?
- Hvis vi benytter en ny form for energilagringsteknologi, kan vindenergi så komme til at dække en større andel af energiproduktionen?

For det andet, om der er modellering i selve styringen af energiproduktionen og -forbruget. Her drejer det sig om at finde svar på spørgsmål som:

- Hvordan kan man bedst få vaskemaskinen til at starte, når sol- og vindenergiproduktionen er høj?
- Hvordan kan man forudsige sol- og vindenergiproduktionen i hver time det næste døgn?

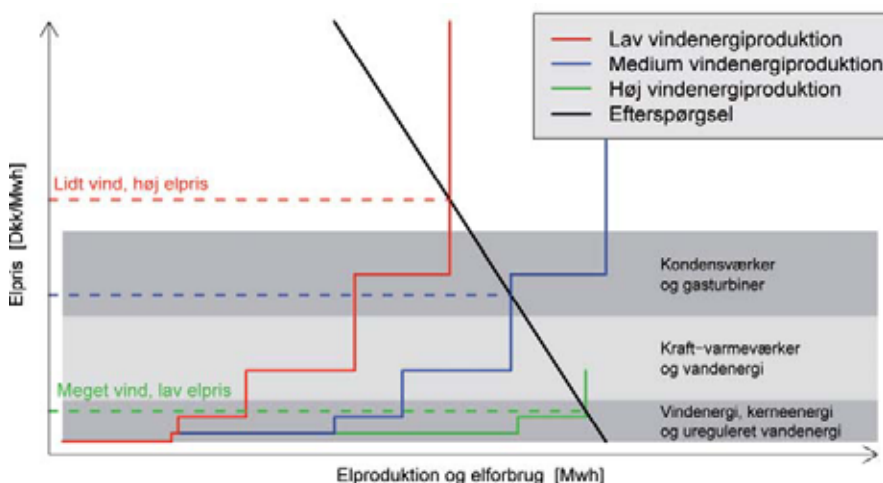
Denne artikel har det sidste perspektiv og handler om matematisk modellering i styringen af energiforbruget. Første afsnit er en forklaring af, hvordan man kan få elforbruget til at følge elproduktionen ved at hæve og sænke elprisen. De næste to afsnit handler om opvarmning af et hus. Idéen er at udnytte husets evne til at lagre termisk energi ved at varme ekstra op, når sol- og vindenergiproduktionen er høj, for derved at kunne bruge mindre energi, når den er lav. Det sidste afsnit handler om forudsigelse af solenergiproduktionen. Det er både brugbart for opvarmningen af huse og for energiproduktion med solceller.

Variierende elpriser kan styre elforbruget

Prisen på elektricitet kan bruges til at styre elforbruget. Idéen er, at når elprisen er høj, så vil folk bruge mindre strøm og derfor flytte noget af deres elforbrug til, når elprisen er lav. For at det kan lade sig gøre, kræver det, at elprisen bliver sendt, f.eks. via internettet, ud til alle huse og maskiner. I fremtiden sidder der måske et netstik i vaskemaskinen, så den selv kan hente elprisen og finde ud af, hvornår det vil være billigst at vaske. Det vil sikkert være i løbet af natten, eller når vinden blæser.

Elprisen bliver bestemt på et elmarked, hvor elproducenter sælger strøm, og elforbrugere køber strøm. Elforbrugernes bud på, hvor meget de vil købe, afhænger af elprisen. Hvis den er lav, så vil de købe mere, og hvis den er høj, så vil de købe mindre. Ved at lægge alle buddene sammen så dannes en efterspørgselskurve, det er den sorte linje i figur 1. Elproducenterne byder ind på elproduktionen med bud på, hvor billigt de kan lave elektriciteten. Ved at arrangere budene, så de billigste kommer først, dannes en udbudskurve, som er den blå linje i figur 1. Elprisen fastsættes der, hvor de to kurver skærer hinanden. Ud fra udbudskurven kan det ses, at den billigste elektricitet, når man ikke regner de faste omkostninger med, er fra vindenergi, kerneenergi og ureguleret vandenergi. Elprisen bliver påvirket af, hvor meget vindenergi der produceres. Når vindenergiproduktionen er lav, så flytter udbudskurven sig mod venstre, som den røde kurve i figuren, og elprisen stiger. Og når vindenergiproduktionen er høj, så flytter udbudskurven sig mod højre, som den grønne kurve, og elprisen falder.

Pointen er altså, at når vinden blæser meget, dvs. når der er meget af den billige vindenergi, så er elprisen lav, og når det kun blæser lidt, så er elprisen høj. Hvis man forudsætter, at elforbrugerne flytter deres forbrug efter elprisen, kan man således med en elpris, der varierer, få en del af elforbruget til at følge elproduktionen. Når det kommer til at fungere i praksis, vil det være muligt at forhøje andelen af vindenergi i den samlede elproduktion.



Figur 1. Dannelse af elprisen på det nordiske elmarked. Elprisen fastsættes der, hvor udbudskurven skærer efterspørgselskurven.

Modeller af varmeforbruget i et hus

For at finde ud af, hvordan termisk energi strømmer ind og ud af et hus, kan man lave en matematisk model af varmedynamikken i huset. Modellen kan bruges til flere relevante formål, bl.a.:

- Bestemme varmekapaciteten i huset. Hvis det er bygget af træ, vil det have en lille varmekapacitet, modsat hvis det er bygget af sten, så vil det have en stor varmekapacitet.
- Baseret på elprisen at finde den optimale strategi til at varme huset op på. F.eks. kan det måske betale sig at varme lidt ekstra op midt på eftermiddagen og så slukke for varmen, når alle bruger strøm til madlavning, for der er elprisen høj.

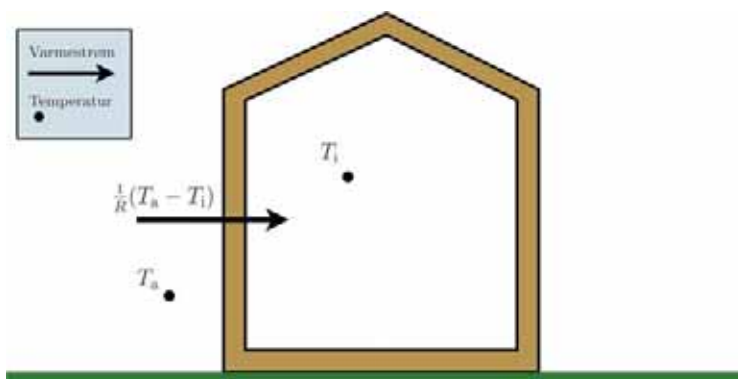
De næste afsnit handler om opbygningen af en matematisk model af varmedynamikken i et hus, dvs. hvordan termisk energi bevæger sig ind og ud af huset.

En matematisk model af varmedynamikken i et hus er en (eller flere) ligninger, der beskriver, hvordan den termiske energi bevæger sig i det fysiske system, som består af huset og dets omgivelser.

Den model, vi vil lave her, er illustreret i figur 2 og har to områder: huset og omgivelserne. De er adskilt af bygningens vægge og tag, som antages at være en ensartet barriere. Man kan sagtens lave modellen mere avanceret, f.eks. kan man dele huset i hvert enkelt rum eller have forskellige typer af vægge. Det lyder fint med en meget avanceret model, men det er ikke altid bedre. Faktisk er en simpel model tit bedre at bruge end en avanceret model, fordi der er flere fejlmuligheder i den avancerede model, men det afhænger naturligvis af problemet, der skal løses.

Nu er opgaven at lave en matematisk beskrivelse af modellen. Vi starter med at se på barrieren mellem huset og omgivelserne. Fra varmeteori ved vi, at hvis temperaturerne på begge sider af væggen er konstante, så kan varmestrømmen $\frac{dQ}{dt}$ igennem væggen beskrives ved

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R}(T_a - T_i) \quad (1.1)$$



Figur 2. Illustration af simpel model af varmedynamikken i et hus.

hvor

- dQ er den termiske energi, der har bevæget sig i tiden dt og har enheden [$\frac{J}{s} = W$],
- T_i er indetemperaturen i huset, og T_a er temperaturen af omgivelserne, og de har enheden [$^{\circ}C$],
- R er modstanden mod varmemstrømmen igennem husets vægge, og enheden er [$\frac{^{\circ}C}{W}$].

T_i og T_a er altså temperaturerne på hver sin side af væggen, og R beskriver, hvor godt huset er isoleret. For at komme videre skal vi bruge en sætning til fra varmeteori. Den beskriver sammenhængen mellem den termiske energi i huset Q og indetemperaturen i huset T_i , ved

$$Q = CT_i \quad (1.2)$$

hvor C er varmekapaciteten af huset og har enheden [$\frac{J}{^{\circ}C}$]. Den differentieres med hensyn til tiden

$$\frac{dQ}{dt} = C \frac{dT_i}{dt}. \quad (1.3)$$

Det indsættes i (1.1), og nu kan modellen af varmedynamikken i huset skrives som

$$C \frac{dT_i}{dt} = \frac{1}{R} (T_a - T_i), \quad (1.4)$$

der for at få den endelige model omskrives til

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{1}{RC} (T_a - T_i). \quad (1.5)$$

Vi har altså en model, som med temperaturer beskriver varmedynamikken. Det er smart, for det er nemt at måle temperaturen og forholde sig til den. Modellen er en 1. ordens differentialligning, og den kan man finde en løsning til. Løsningen er en funktion, der – givet man kender $T_i(t)$, som er indetemperaturen til tiden t – giver indetemperaturen til tiden $t + k$. Løsningen er funktionen

$$T_i(t+k) = T_a + e^{-\frac{k}{RC}} (T_i(t) - T_a), \quad (1.6)$$

som også forudsætter at T_a er konstant mellem t og $t + k$.

Det, vi vil bruge modellen til, er at forudse systemet, dvs. forudse indetemperaturens udvikling frem i tiden. Hvis tiden $t = 0$ er nu, og vi kender $T_i(0)$, altså indetemperaturen lige nu, så kan vi, hvis vi antager, at udetemperaturen T_a er konstant, direkte med (1.6) udregne temperaturen i huset til et hvilket som helst tidspunkt i fremtiden. Det er dog en lidt dårlig antagelse, at udetemperaturen er konstant i længere perioder, f.eks. når man vil forudse indetemperaturen et helt døgn frem. For at løse det problem er der ikke andet at gøre end at dele perioden op i mindre dele og derved diskretisere beregningerne. Spørgsmålet er så bare, hvor små perioderne, hvor vi antager konstant udetemperatur, skal være? Hvis vi har meteorologiske prognoser af udetemperaturen for hver time i det næste døgn, så vil det være smart at regne med t i timer, og det gør vi i resten af artiklen. Altså antager vi, at udetemperaturen er konstant en time ad gangen.

Så for at forudsige mange timer frem beregner vi med konstant udetemperatur en time frem ad gangen med (1.6).

Udvidelse med radiatorer og solenergi

Den hidtidige model tager ikke højde for, at der kommer energi ind i huset fra radiatorer og solstråling. En udvidet model er illustreret i figur 3. De to nye inputs sættes ind i ligning (1.5), så ændringen i den termiske energi i huset på dQ i tidsrummet dt , altså varmestrømmen $\frac{dQ}{dt}$, beskrives ved

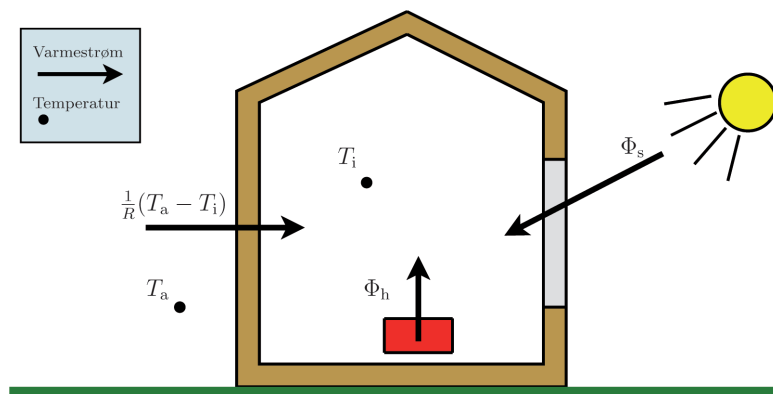
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R} (T_a - T_i) + \phi_s + \phi_h, \quad (1.8)$$

og ligesom vi kom fra (1.1) til (1.5), kan dette beskrives ved ændringen i temperatur, således

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{1}{RC} (T_a - T_i) + \frac{1}{C} \phi_s + \frac{1}{C} \phi_h, \quad (1.9)$$

hvor

- ϕ_s er energien, der kommer ind i huset fra solstråling, hovedsageligt gennem vinduerne i huset, og har enheden [kW],
- ϕ_h er effekten, der kommer fra radiatorerne i huset og har enheden [kW].



Figur 3. Illustration af varmedynamikmodel med radiatorer og solenergi.

Denne model kan vi bruge til en del forskellige formål. Grundlæggende er den bedre end den første model, fordi den tager højde for energien fra solstrålingen, men den kræver til gengæld også mere viden. Vi skal, ud over prognoser af udetemperaturen, også vide, hvor meget energi der kommer fra solen i det kommende døgn. Det klarer vi ved at lave prognoser af solenergien, og det handler afsnittet “Solenergi-prognoser” om. Det sidste, der kræves for at bruge modellen, er, at vi skal vide, hvor meget energi der kommer fra radiatorerne. Her kommer noget af det virkelig smarte ved matematisk modellering. Vi kan nemlig styre energien fra radiatorerne, altså bestemme, hvornår og

hvor meget radiatorerne skal tændes i løbet af det næste døgn. Endelig kan vi løse det egentlige problem: At flytte elforbruget efter elprisen og bruge strømmen, når den er billig. Det skal naturligvis være et hus med elektriske radiatorer. Det gøres ved at lave en økonomisk optimering af opvarmningen i huset. Det kræver dog prognoser af elprisen, men hvis vi har dem givet for hver time som $P_{el}(t)$ for $t = 1, \dots, 24$, så kan vi beregne prisen for opvarmningen det næste døgn ved

$$P_{op} = \sum_{t=1}^{24} P_{el}(t) \cdot \phi_h(t) \quad (1.10)$$

hvor $\phi_h(t)$ er energien, som er brugt i den t 'te time. Det er altså forudsat, at alt den strøm, vi bruger, bliver omsat til varme afgivet i huset. Men det er jo meget nemt at minimere! Den billigste opvarmning er selvfølgelig slet ikke at tænde for varmen. Der må altså nogle begrænsninger på problemet, en rimelig en kunne være, at indetemperaturen ikke må komme under 20°C .

Solenergiprognoser

	Forbrug	Gas	Uran	Olie	Kul	Solenergi
Energi i ZJ	0.5	16	17	19	290	3800

Tabel 1. Forventede tilbageværende energiressourcer sammenlignet med det nuværende globale årlige energiforbrug og den årlige solenergi, som absorberes i atmosfæren og jorden.

Potentialet for udnyttelse af solenergi overstiger mange gange alle andre aktuelt tilgængelige ressourcers potentiale¹. I tabel 1 er vist værdier af estimerede tilbageværende energiressourcer.

Man kan naturligvis ikke udnytte hele solenergi potentialet, men det er også omkring 7.000 gange større end det globale energiforbrug. Der er altså rigeligt med energi at hente direkte fra solen til at dække det globale energiforbrug.

Solen skinner da ikke så meget i Danmark? Fremtidens energiproduktion bliver sikkert en kombination af mange teknologier, og solenergi er smart, fordi den kan installeres på hustagene, og fordi teknologien bliver billigere i fremtiden, modsat andre, f.eks. olie, som bliver dyrere. Hvad er så problemet? Der er en del problemer, der skal løses! Så det er bare med at komme i gang. Som beskrevet i indledningen er det grundlæggende problem, at energiproduktionen ikke kan styres. Derfor er det vigtigt at forudse solenergi produktionen, hvis man vil forhøje andelen af solenergi i elproduktionen. På IMM har vi udviklet en metode til at forudse solenergi produktionen. Den er udviklet med data fra solceller, som sidder på hustage, men kan også sagtens bruges til at forudse solenergien, der kommer ind i et hus.

I byen Brædstrup i Jylland er der installeret omkring 300 solcelleanlæg på hustage. For at udvikle en metode til forudsigelse af solenergi produktionen bruger vi målinger fra 20 af anlæggene. Produktionen for hver time er målt og repræsenteres med

¹http://en.wikipedia.org/wiki/Energy_resources. Hentet den 21/11-2008.

$$\phi_t^s, \text{ hvor } t = 1, 2, \dots, n \quad (1.11)$$

er tiden for målingen i timer og n er antallet af målinger. Den første måling ϕ_1^s er solenergien, der er produceret den 10/5-2006 mellem kl. 00.00 og kl. 01.00, ϕ_2^s er for timen efter og så videre. Målingerne er vist som punkter i figur 4. Studerer man på målingerne lidt, er det helt klart, at produktionen er afhængig af tiden på dagen. Den er nul om natten, stiger om formiddagen og falder igen om eftermiddagen. Denne afhængighed er ikke så god for den forudsigelsesmetode, vi bruger, så derfor gælder det først om at få fjernet denne afhængighed. Det gør vi ved at beregne en variabel, der repræsenterer solenergiproduktionen ved skyfri himmel, den kaldes ϕ_t^{cs} . Forkortelsen "cs" kommer fra det engelske "clear sky". Hvordan den beregnes springer vi over her. I figur 4 er solenergiproduktionen ved skyfrit vist med den røde kurve. Det smarte ved at beregne den er, at den kan bruges til lave en transformation af ϕ_t^s til en ny variabel τ_t , som beskriver, hvor meget skyerne i atmosfæren blokerer for solens stråler, altså skydækket i timen t .

Transformationen laves ved

$$\tau_t = \frac{\phi_t^s}{\phi_t^{cs}}. \quad (1.12)$$

Altså er det forholdet mellem den målte solenergiproduktion i timen t , som er dæmpet af skyer, der skygger, i forhold til solenergien, som ville være kommet ved skyfri himmel. Så hvis τ_t er omkring 1, betyder det, at der var skyfrit i løbet af timen t , og hvis den er omkring 0, så var der overskyet. Ved denne transformation har vi fjernet det meste af solenergiproduktionens afhængighed af tiden på dagen.

Nu mangler der en metode til forudsigelse, som til tiden t laver et godt gæt på værdien af τ_{t+k} , altså hvor skyet det er om k timer. k er ligesom t en heltalstæller, som, hvis vi skal lave forudsigelser for hver time op til et døgn, skal have værdierne fra 1 til 24. Det, vi gør, er at lave én model til 1 times forudsigelser, en anden model til 2 timers forudsigelser osv., altså en model til hver horisont k . For lige at gøre det lidt nemmere at overskue undersøger vi nu kun modellen til 2 timers forudsigelser, altså hvor $k = 2$, som skrives

$$\tau_{t+2} = \hat{\tau}_{t+2} + \epsilon_{t+2}. \quad (1.13)$$

Selve gættet beregnes ved den lineære funktion

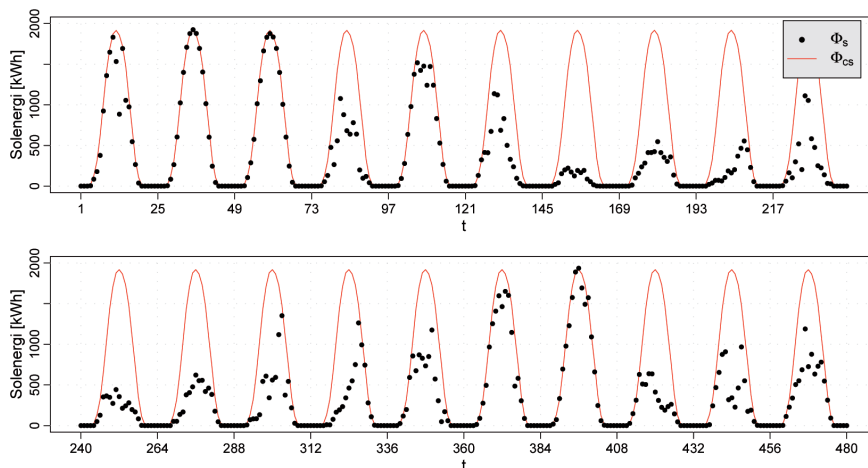
$$\tau_{t+2} = b + a \cdot \tau_t, \quad (1.14)$$

hvor b er skæringen og a hældningen af funktionens graf, som jo er en ret linje. Læg mærke til, at en hat over en variabel markerer, at den repræsenterer et gæt, altså en værdi, vi ikke kender, men i stedet estimerer (beregner) ud fra målinger. Det, som vi gætter forkert, er beskrevet ved fejlen ϵ_{t+2} , og den kan ud fra (1.13) og (1.14) beregnes ved

$$\epsilon_{t+2} = \tau_{t+2} - \hat{\tau}_{t+2} = \tau_{t+2} - (b + a \cdot \tau_t). \quad (1.15)$$

Fejlen er altså forskellen mellem den rigtige værdi og vores gæt. For at opsummere metoden kan man tænke: Når tiden er t , og vi gætter på, hvor skyet det er om 2 timer, så

beregner vi det ud fra, hvor skyet det er lige nu. Den fejl, vi laver på gættet ϵ_{t+2} , finder vi ved at trække forudsigelsen $\hat{\tau}_{t+2}$ fra den rigtige værdi τ_{t+2} .



Figur 4. Målingerne af solenergiproduktionen er vist som punkter. Den røde linje er den beregnede produktion ved skyfrit.

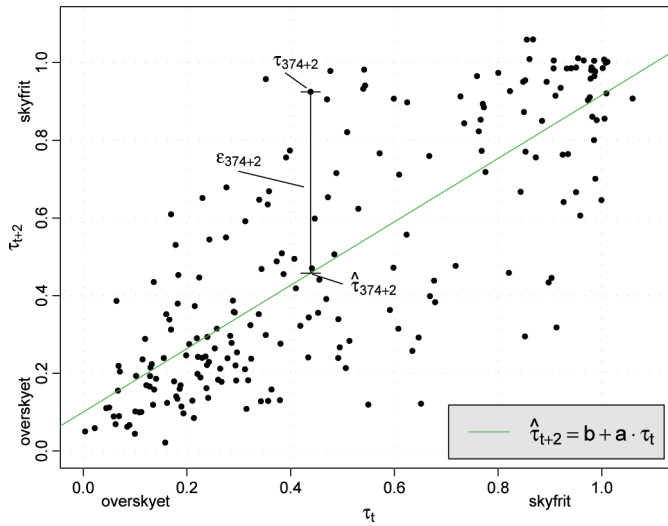
Nu er vi på jagt efter information om funktionen mellem τ_t og τ_{t+2} , og den information kan vi finde i målingerne. Det smarteste at starte med er at lave et plot af alle målingerne som i figur 5. På plottet ses det, at der helt klart er en afhængighed mellem τ_t og τ_{t+2} . Sagt på en anden måde: Det kan ses, at hvis det er overskyet nu, så er der også en god chance for, at det er overskyet om 2 timer, og det samme gælder for skyfrit. Nu mangler vi bare et matematisk udtryk, der beskriver τ_{t+2} som funktion af τ_t , og som sagt vil vi bruge den lineære funktion i (1.14). Spørgsmålet er så bare, hvilke værdier a og b skal have. Af forskellige årsager og under visse forudsætninger – de nærmere detaljer springer vi over her – er de optimale værdier af a og b dem, der minimerer summen af de kvadrerede fejl. Det er et minimeringsproblem og skrives således

$$\min \sum_{t=1}^{n-2} \epsilon_{t+2}^2 = \min_{a,b} \sum_{t=1}^{n-2} (\tau_{t+2} - (b + a \cdot \tau_t))^2. \quad (1.16)$$

Hvis man tænker fejlen ϵ_t som afstanden mellem punktet og linjen, så betyder udtrykket bare: Find den linje, hvor summen af afstandene i anden er mindst. Heldigvis kan man med nogle rimeligt simple beregninger finde den linje, og gør man det med målingerne, så får man $\hat{b} = 0,10$ og $\hat{a} = 0,82$. Det er den grønne linje på plottet. Læg lige mærke til, at der kom en hat over a og b , når vi har estimeret (beregnet) deres værdi.

For at få den endelige forudsigtelse af solenergiproduktionen skal vi lige transformere tilbage ved

$$\hat{\Phi}_{t+2}^s = \hat{\tau}_{t+2} \cdot \Phi_{t+2}^{cs}. \quad (1.17)$$



Figur 5. Plot af skydækket τ_t over for skydækket to timer senere, τ_{t+2} . Linjen viser den lineære funktion, der minimerer summen af de kvadrerede fejl. Den har $\hat{b} = 0,1$ og $\hat{a} = 0,82$.

Vi gentager derefter hele metoden for andre horisonter, altså for andre værdier af k , og således kan vi lave forudsigelser for hver time i det kommende døgn. Metoden beskrevet her i artiklen er en forsimpning af den, vi benytter rigtigt, men er baseret på samme principper. Det er f.eks. nødvendigt at inkludere vejrudsigter fra DMI for at forbedre forudsigelserne for horisonter på 6 timer og derover.

Artiklens forfatter



Ph.d.-studerende Peder Bacher





(Foto: NASA)

Mission til Mars



(Foto: NASA)

Den 4. december 1996 blev NASAs *Mars Pathfinder mission* skudt i gang. Missionen gik ud på at sende en lille bil kaldet Sojourner til Mars. Bilen skulle for det første kunne overleve mere end 7 dage på den røde planet og samtidigt kunne køre rundt og "smage" på sten, altså finde ud af, hvad stenene var lavet af. Den energi, som Sojourner havde brug for, skulle enten komme fra et medbragt batteri eller produceres på Mars. Den hyppigst og nemmest tilgængelige energikilde i rummet er solens stråler, som kan høstes ved hjælp af solceller.

Sojourners energiforbrug vekslede med vanskeligheden af de opgaver, som bilen udførte, men selvom NASAs ingeniører designede bilen, så den brugte så lidt energi som overhovedet muligt, var det meget vanskeligt på forhånd at vurdere dette energiforbrug, bl.a. fordi energiforbruget også afhæng af temperaturen på Mars. NASAs ingeniører besluttede sig for, at Sojourner højst måtte udføre en opgave ad gangen. Ved at "serialisere" Sojourners opgaver kunne ingeniørerne på Jorden præcist kontrollere, hvor meget energi Sojourner brugte og på den måde sikre, at forbruget ikke oversteg, hvad der var tilgængeligt i solcellerne og det medbragte batteri. Denne fremgangsmåde bevirkede dog, at Sojourner ikke udnyttede sin tid særlig godt på Mars. Bilen blev designet, så den altid udførte den samme serie af handlinger uanset mængden af tilgængelig energi. Hvis der skulle blive leveret noget overskydende energi fra solcellerne, blev det bare brugt til at opvarme hjulene. Sojourner har en topfart på blot 10 cm i minuttet (dvs. kun 0,006 km/t!) og kunne kun tage tre billeder på en hel dag. Hvis Sojourner i stedet havde paralleliseret nogle opgaver, når der var meget energi til rådighed, kunne den have sparet mere batteri og udført sine opgaver hurtigere. Teknikken til at forbedre Sojourners effektivitet er funderet i løsningen af et kendt matematisk problem. I dette kapitel vil du lære denne teknik, som vil gøre dig i stand til at lave en bedre Sojourner end selv NASAs egne ingeniører!

Energiforbruget afhænger af opgaven

Energiforbruget til din mobiltelefon, pc, Xbox eller PlayStation afhænger ikke kun af den mængde tid, du har apparatet tændt. Det virker umiddelbart logisk, at en mobiltelefon bruger mere energi på at tage et billede end på at skrive en sms. Lige så soleklart må det være, at hvis man på sin PlayStation spiller et spil med meget grafik, bruger man mere energi end ved at spille et gammelt Pacman-spil. Jo mere avanceret grafik med lynhurtige bevægelser af biler, fly og andre figurer, jo mere skal computeren i PlayStation beregne. Et gammelt spil som Pacman arbejder for det første kun i to dimensioner, og for det andet er spillet bygget op omkring meget simple figurer, som ikke kræver den store beregningskraft. Elregningen vokser altså, når man spiller de mest avancerede computerspil.

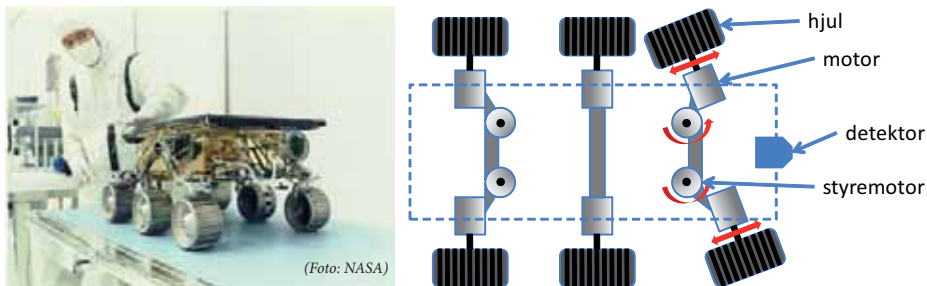


(Foto: NASA)

På Mars handler det at spare energi imidlertid ikke om at reducere elregningen eller skåne miljøet. Med års forberedelse og en udgift på mange milliarder \$ for at sende Sojourner på langfart i vores solsystem og få bilen sikkert ned på Mars er det helt afgørende, at apparatet har nok energi til at gennemføre sine opgaver. Det er solens placering på himlen, der afgør, hvor meget energi Sojourners solceller kan høste. NASAs ingeniører kunne derfor ikke selv styre energiproduktionen, så hvis en solcelle høster 10W, men bilen kun har brug for 3W, så går de resterende 7W til spilde, medmindre man har et genopladeligt batteri, hvilket Sojourner desværre ikke havde. Hvis bilen har 10W tilgængeligt, kan den derfor ligeså godt bruge dem til noget fornuftigt. Den grundlæggende idé i dette kapitel er at udnytte energiressourcerne (specielt den ”gratis” energi fra solcellerne) bedst muligt, således at Sojourner kan udføre sine opgaver hurtigst muligt.

Sojourner

For at forstå de problemer NASAs ingeniører skulle løse, må vi først forstå, hvordan Sojourner er opbygget og hvordan den virker. Sojourners mission var at køre rundt på Mars’ overflade og indsamle information. I dette kapitel vil vi begrænse os til at kigge på den del af missionen, som får Sojourner til at køre fra A til B, dvs. at vi ser bort fra den del, der tager billeder og jordprøver af Mars’ overflade. Figur 1 viser et billede af Sojourner og en principtegning af, hvordan 10 motorer får den til at køre.

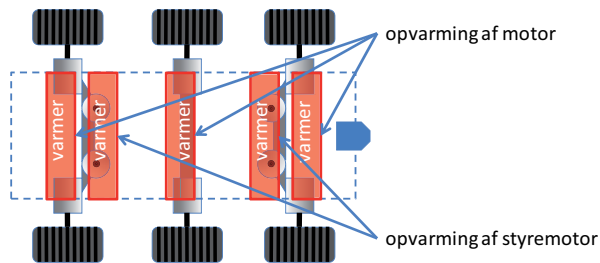


Figur 1. Sojourner og en principtegning for, hvordan den kører.

Sojourner har 6 hjul, der hver bliver drevet af en motor, og de 4 hjul i hjørnerne har desuden hver en styremotor som vist i figur 1. Alle hjul kan således kontrolleres individuelt. Sojourner er desuden udstyret med et laserstyret system til detektering af forhindringer i dens kørebane. For at få Sojourner til at bevæge sig rundt på Mars' overflade kræver det en koordinering af en række opgaver. I den enkleste version foretages følgende opgaver:

1. Detekter forhindringer
2. Styr hjul
3. Kør 7 cm (en rotation af hjulene)
4. Gentag fra punkt 1

En af de helt store udfordringer er, at der er meget koldt på Mars, mellem -40 og -80 °C. Det betyder, at man f.eks. er nødt til at opvarme motorerne på Sojourner, før den kan styre og køre. Der bruges således energi til både at køre Sojourner og til at holde dens komponenter varme. Figur 2 viser de 5 varmere, der kan bruges til at opvarme de 6 motorer og 4 styremotorer.

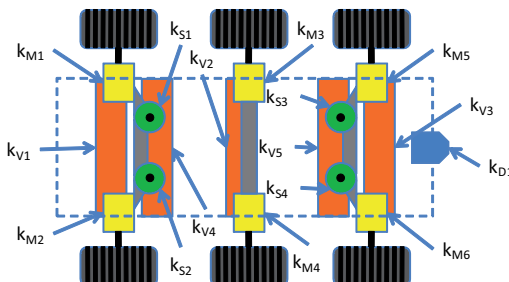


Figur 2. Principtegning for Sojourners varmekomponenter.

Vi kan nu beskrive vores forenklede version af Sojourner ved mængden af de komponenter k_i , som den består af. Vi kan således repræsentere Sojourner ved $K = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$. For senere at kunne referere til de enkelte komponenter vil vi bruge notationen i tabel 1.

K_M	Motor	$\{k_{M1}, k_{M2}, k_{M3}, k_{M4}, k_{M5}, k_{M6}\}$
K_S	Styremotor	$\{k_{S1}, k_{S2}, k_{S3}, k_{S4}\}$
K_D	Detektor	$\{k_{D1}\}$
K_V	Varmer	$\{k_{V1}, k_{V2}, k_{V3}, k_{V4}, k_{V5}\}$

Tabel 1. Notation for komponenterne i Sojourner.



Figur 3. Nummerering af Sojourners komponenter med farvekoder.

Elementer i en opgave

En *opgave* beskriver en aktivering af en eller flere komponenter. Det kunne f.eks. være ”kør fremad i 10 sekunder” eller ”varm motor i 5 sekunder”. En opgave definerer således den mængde af komponenter, som den aktiverer, samt hvor lang tid de skal aktiveres. Vi skriver dette som en ordnet mængde, $o_i = (\{k_1, \dots, k_j\}, t_i)$, dvs. at opgave o_i kontrollerer j komponenter, fra k_1 til k_j i t_i sekunder. Hvis vi kun betragter hjul 1, som køres af motor 1 (k_{M1}), får vi for de to eksempler,

$$o_{\text{kør}} = (\{k_{M1}\}, 10), \text{ ”kør hjul 1 fremad i 10 sekunder”}$$

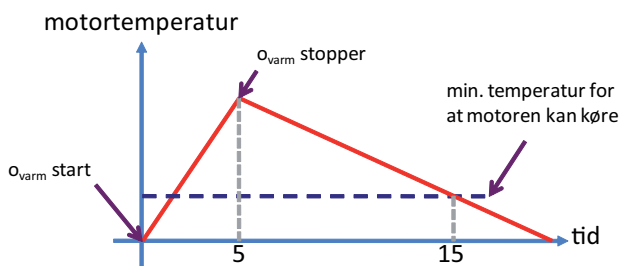
$$o_{\text{varm}} = (\{k_{V1}\}, 5), \text{ ”varm motor 1 (og 2) i 5 sekunder”}$$

Hvis vi erstatter k_{M1} med K_M , og k_{V1} med K_V , vil opgaven dreje sig om alle 6 hjul og de 3 varmere.

Det er den centrale computer i Sojourner, der styrer, hvilken opgave der skal udføres på et givet tidspunkt. En mission beskriver bl.a. mængden af opgaver, der skal udføres for at nå et bestemt mål, dvs. $O = \{o_1, \dots, o_n\}$. For Sojourner kunne det f.eks. være at køre fra et punkt til et andet uden at køre ind i større Mars-sten eller falde ned i en kløft. Missionen beskriver således rækkefølgen af opgaver, som skal sikre, at missionen lykkes, og det er denne beskrivelse, der bliver til det program, som Sojourners computer skal udføre. Indbyrdes afhængigheder mellem de enkelte opgaver gør, at det ikke er ligegyldigt, i hvilken rækkefølge de aktiveres. Lad os se på et eksempel.

Eksempel 1

Som nævnt i indledningen er en af de store udfordringer på Mars, at komponenterne skal opvarmes, inden de kan bruges. I dette eksempel vil vi kun se på hjul 1. Vi skal altså varme motoren, før vi kan køre. Figur 4 viser et forløb af, hvordan temperaturen ændrer sig, når varmeren (k_{V1}) til hjulmotor 1 (k_{M1}) tændes til tiden 0 og slukkes igen efter 5 sekunder, svarende til opgaven o_{varm} . Vi vil antage, at det altid tager 5 sekunder at opvarme en motor, det betyder, at vi tidligst kan starte motoren til tiden 5. Men da det tager noget tid (10 sekunder på figur 4), før motoren bliver så kold, at den ikke kan startes, uden at den opvarmes igen, så har vi mulighed for at starte motoren på et vilkårligt tidspunkt mellem tiden 5 og 15. Det var denne fleksibilitet, som NASAs ingeniører skulle have udnyttet for at finde den mest energieffektive måde at køre Sojourner på Mars' overflade, men det vender vi tilbage til senere.

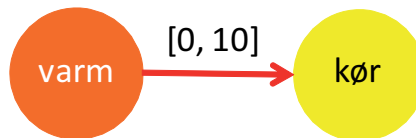


Figur 4. Hvordan hjulet varmes op og falder i temperatur, efter opvarmningen er stoppet.

Det tidlige aspekt af en mission

Vi indfører nu tid i vores simple model. For at kunne afgøre hvor lang tid det tager at afvikle en mission, skal der ud over den tid, det tager at udføre en opgave, også tages højde for tidlige relationer *mellem* opgaver. Den tid, det tager at udføre opgave o_i , definerede vi som t_i , f.eks. er $t_{\text{varm}} = 5$ sekunder. Et eksempel på de tidlige krav mellem opgaver så vi i eksempel 1, hvor opgaven $o_{\text{kør}}$ ikke må starte før *tidligst* lige efter, at opgaven o_{varm} er sluttet. Denne *tidsafhængighed* mellem o_{varm} og $o_{\text{kør}}$ er en *minimum* tidsafhængighed t_{min} , $o_{\text{kør}}$ må altså gerne startes senere end 0 sekunder efter, at o_{varm} er startet. I eksempel 1 lærte vi, at det også kan være nødvendigt at udtrykke en *maksimum* tidsafhængighed t_{max} , dvs. at der højst må gå 10 sekunder, fra o_{varm} er slut, til $o_{\text{kør}}$ starter, ellers bliver motoren for kold til at kunne starte.

Vi kan nu definere en *mission* M som mængden af de opgaver, der skal udføres samt deres indbyrdes tidlige relationer. Vi skriver det som en ordnet mængde $M = (O_M, R_M)$, hvor $o_i \in O_M$ er mængden af opgaver i missionen og $r_{i,j} \in R_M$ er mængden af tidsrelationer mellem opgaver, $r_{i,j} = (o_i, o_j, [t_{\text{min}}, t_{\text{max}}])$. De tidlige relationer mellem to opgaver angives som et *interval* fra minimum t_{min} til maximum t_{max} . Missionen kan også udtrykkes som en orienteret *graf* som vist for vores simple eksempel i figur 5, hvor knuderne er opgaverne og kanterne er de tidlige relationer angivet ved pile. De tidlige relationer angives som et interval $[t_{\text{min}}, t_{\text{max}}]$.

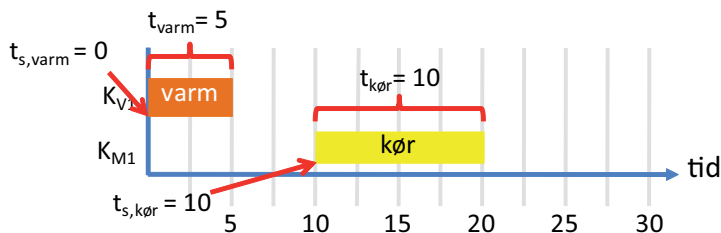


Figur 5. Missionsgraf for eksempel 1.

Idet vi i dette afsnit udelukkende fokuserer på de tidlige aspekter, kan vi nu formulere vores problem i termer af vores matematiske model:

Givet en mission $M = (O_M, R_M)$, find for hver opgave $o_j \in O_M$ opgavens starttidspunkt $t_{s,j}$ således at alle tidlige relationer $r \in R_M$ overholdes.

Løsningen på dette problem kan repræsenteres ved et *tidsdiagram* (også kaldet et Gantt diagram). Figur 6 viser tidsdiagrammet for en mulig løsning på vores simple problem.



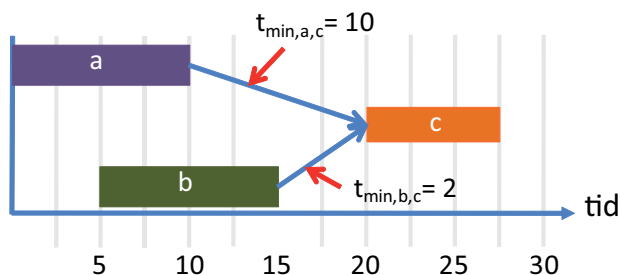
Figur 6. Tidsdiagram for missionen.

Det er nemt at se, at løsningen i figur 6 overholder tidsafhængighederne, men hvad nu hvis vores missionsgraf havde indeholdt 300 opgaver og 1.000 tidsafhængigheder? Hvordan ville vi så finde en løsning? Det, vi har brug for, er en systematisk metode, kaldet en *algoritme*, der ud fra missionsgrafen kan give os starttidspunktet for hver eneste opgave i missionen.

Idéen med algoritmen er, at vi kan udregne den tidligste starttid $t_{s,i}$ for en opgave o_i , når vi kender starttidspunktet for alle de opgaver o_j , der har en tidsafhængighed til o_i , og som skal starte tidligere end o_i , dvs. alle de opgaver i missionsgrafen, der har en pil til o_i . Vi kan udregne starttidspunktet for o_i som

$$t_{s,i} = \max_j (t_{s,j} + t_j + t_{\min,j,i}), \text{ hvor } o_j = \{ o_j \in O_M \mid (o_j, o_i) \in R_M \}$$

Hvor $\max_j(x)$ er den funktion, som giver os den maksimale værdi af x for alle o_j , f.eks. $\max(3, 7, 2)$ giver resultatet 7. Figur 7 giver en illustration af denne udregning, hvor $t_{s,c}$ skal findes.



Figur 7. Eksempel på udregning af tidligst starttid for opgave c.

Bruger vi formlen, får vi

$$\begin{aligned} t_{s,c} &= \max(t_{s,a} + t_a + t_{\min,a,c}, t_{s,b} + t_b + t_{\min,b,c}) \\ &= \max(0 + 10 + 10, 5 + 10 + 2) \\ &= \max(20, 17) \\ &= 20 \end{aligned}$$

For at kunne anvende denne beregning kræver det, at opgaverne tages i den rigtige rækkefølge. Vi skal således sikre os, at starttidspunkterne allerede kendes for de opgaver, der ligger før den opgave, der regnes på, dvs. at vi i figur 7 skal sikre os, at starttidspunkterne for o_a og o_b beregnes før o_c . Vi kan finde denne rækkefølge af opgaver ved at benytte algoritmen for topologisk sortering. Idéen med *topologisk sortering* er, at man starter med de opgaver, der kun har pile, der går ud fra opgaven (dvs. de opgaver, som der ikke er nogen opgaver, der peger på). Fra disse opgaver bevæger man sig gradvist gennem hele grafen, indtil alle opgaver er besøgt.

Algoritme 1 (Topologisk Sortering):	
Input:	en missionsgraf M
Output:	en ordnet mængde L med alle opgaver topologisk sorteret
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Lad L være en tom mængde, $L = ()$, og lad S være mængden af alle opgaver, som ikke har nogle pile, der peger på dem. 2. Sæt v til en af opgaverne i S, og fjern den fra S. Sæt v ind bagest i L. 3. For alle opgaver u, hvor der er en pil fra v til u, fjern pilen fra M. 4. Hvis u ikke har andre pile, som peger på den, så indsæt den i S. 5. Hvis der er flere opgaver i S, så gå til punkt 2, ellers fortsæt. 6. L indeholder nu den sorterede mængde af opgaver.

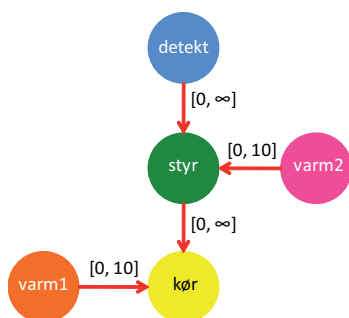
Med den sorterede mængde kan vi nu finde den tidsmæssigt længste vej i missionsgraf, og dermed hvor hurtigt vi kan udføre missionen.

Algoritme 2 (Længste Vej):	
Input:	en missionsgraf M en topologisk sorteret mængde af opgaver L
Output:	en mængde TS af ordnede par, der angiver den tidligste starttid for hver opgave, $(o_i, t_{s,i})$. Vi vil bruge notationen $TS[o_i]$ til at angive værdien $t_{s,i}$ for o_i i TS.
	<ol style="list-style-type: none"> 1. For alle opgaver v, indsæt $(v, 0)$ i TS. 2. Sæt v til den første opgave fra L, og fjern v fra L. 3. For alle opgaver u, hvor der er en pil fra u til v, beregn $t_{s,v} = t_{s,u} + t_u + t_{\min,u,v}$ sæt $TS[v] = \max_u(t_{s,v})$, dvs. den største af alle de beregnede startværdier for v. Hvis der er flere opgaver i L, så gå til punkt 2, ellers fortsæt. 4. TS indeholder nu alle de tidligste starttider.

Vi har nu gennemgået den vigtigste teori for at finde starttiderne for alle opgaver. Lad os derfor prøve at bruge algoritmen på et lidt større eksempel.

Eksempel 2

Figur 4 beskrev, hvordan Sojourner er nødt til at varme et hjul op, inden den kan bruge det. Det viser sig dog, at for at få Sojourner til at køre er den naturligvis også nødt til at pege hjulet i den rigtige retning, dvs. styre hjulet. Ud over det så skal Sojourner også tjekke, om der er nogle forhindringer på dens vej mod målet, før den bestemmer sig for, hvordan hjulet skal vinkles. Den skal altså lave en detektion. Vi kan således udbygge missionsgraf, så den kommer til at se ud som vist i figur 8.



Opgave	Beskrivelse	t_i	Komponent
o_{detekt}	detektering af forhindringer	10	detektor
o_{styr}	styring af hjulets vinkel	5	styremotor
$o_{\text{kør}}$	kør Sojourner fremad	10	hjulmotor
o_{varm1}	varm hjulmotor	5	varmer1
o_{varm2}	varm styremotor	5	varmer2

Figur 8. Missionsgraf for det udbyggede system.

Tidsafhængighederne i figur 8 udtrykker følgende om vores system. Fra o_{detekt} til o_{styr} er der en minimum tidsafhængighed på nul, dvs. at o_{styr} kan starte umiddelbart efter, at o_{detekt} er afsluttet. En maximum tidsafhængighed på ∞ (uendelig) betyder, at der ikke er nogen grænse for, hvor længe efter o_{detekt} o_{styr} skal være startet (hvilket er logisk nok, fordi hvis o_{detekt} opdager en forhindring, vil forhindringen jo stadig være der, uanset hvor lang tid den måtte vente). Vi kan ligeledes se at $o_{\text{kør}}$ kan startes lige efter o_{styr} . For de to varme opgaver kan vi se, at den efterfølgende opgave (o_{styr} eller $o_{\text{kør}}$) kan startes lige efter, varmeopgaven er slut, dvs. 0 sekunder efter, og senest 10 sekunder efter varmeopgaven er færdig, som forklaret i eksempel 1.

For at finde opgavernes starttider vil vi i det følgende bruge algoritme 1 og 2. Først bruger vi algoritme 1 til at finde en topologisk sortering af alle opgaver.

Afvikling af Algoritme 1 (Topologisk Sortering):	
Input:	missionsgraf M fra figur 8
	1. $L = ()$, $S = \{o_{\text{varm1}}, o_{\text{detekt}}, o_{\text{varm2}}\}$
	2. $v = o_{\text{varm1}}$, $S = \{o_{\text{detekt}}, o_{\text{varm2}}\}$, $L = (o_{\text{varm1}})$
	3. $u = o_{\text{kør}} \Rightarrow$ fjern pilen mellem o_{varm1} og $o_{\text{kør}}$ i M
	4. u har flere pile, som peger på den. Pilen fra o_{styr} til $o_{\text{kør}}$
	5. Gå til 2.
	2. $v = o_{\text{detekt}}$, $S = \{o_{\text{varm2}}\}$, $L = (o_{\text{varm1}}, o_{\text{detekt}})$
	3. $u = o_{\text{styr}} \Rightarrow$ fjern pilen mellem o_{detekt} og o_{styr} i M
	4. u har flere pile, som peger på den. Pilen fra o_{varm2} til o_{styr}
	5. Gå til 2.
	2. $v = o_{\text{varm2}}$, $S = \{ \}$, $L = (o_{\text{varm1}}, o_{\text{detekt}}, o_{\text{varm2}})$
	3. $u = o_{\text{styr}} \Rightarrow$ fjern pilen mellem o_{varm2} og o_{styr} i M
	4. u har ikke flere pile $\Rightarrow S = \{o_{\text{styr}}\}$
	5. Gå til 2.
	2. $v = o_{\text{styr}}$, $S = \{ \}$, $L = (o_{\text{varm1}}, o_{\text{detekt}}, o_{\text{varm2}}, o_{\text{styr}})$
	3. $u = o_{\text{kør}} \Rightarrow$ fjern pilen mellem o_{styr} og $o_{\text{kør}}$ i M
	4. u har ikke flere pile $\Rightarrow S = \{o_{\text{kør}}\}$
	5. Gå til 2.
	2. $v = o_{\text{kør}}$, $S = \{ \}$, $L = (o_{\text{varm1}}, o_{\text{detekt}}, o_{\text{varm2}}, o_{\text{styr}}, o_{\text{kør}})$

	3. Der er ikke flere pile i M, så vi kan ikke sætte u
	4. Da der ikke er nogen u, foretages intet
	5. Da der ikke er flere opgaver i S, fortsættes til næste punkt
	6. Vi er færdige
Output:	$L = (o_{\text{varm1}}, o_{\text{detekt}}, o_{\text{varm2}}, o_{\text{styr}}, o_{\text{kør}})$

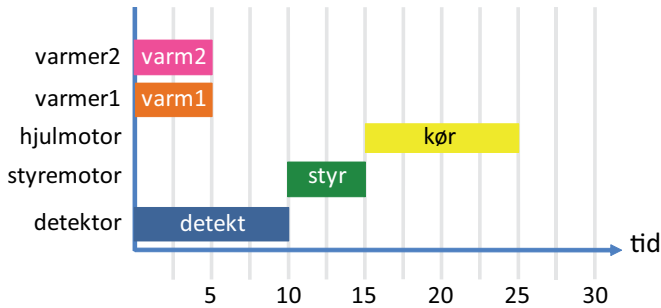
Med den sorterede liste kan vi nu bruge algoritme 2 til at finde de tidligste starttider.

Afvikling af Algoritme 2 (Længste Vej):	
Input:	missionsgraf M fra figur 8 $L = (o_{\text{varm1}}, o_{\text{detekt}}, o_{\text{varm2}}, o_{\text{styr}}, o_{\text{kør}})$
	1. For alle opgaver v, sæt $TS[v] = 0$.
	2. $v = o_{\text{varm1}}, L = (o_{\text{detekt}}, o_{\text{varm2}}, o_{\text{styr}}, o_{\text{kør}})$
	3. der er ingen u \Rightarrow $TS[o_{\text{varm1}}] = 0$, gå til 2.
	2. $v = o_{\text{detekt}}, L = (o_{\text{varm2}}, o_{\text{styr}}, o_{\text{kør}})$
	3. der er ingen u \Rightarrow $TS[o_{\text{detekt}}] = 0$, gå til 2.
	2. $v = o_{\text{varm2}}, L = (o_{\text{styr}}, o_{\text{kør}})$
	3. der er ingen u \Rightarrow $TS[o_{\text{varm2}}] = 0$, gå til 2.
	2. $v = o_{\text{styr}}, L = (o_{\text{kør}})$
	3. $u = o_{\text{detekt}} \Rightarrow t_{\text{start,styr}} = 0 + 10 + 0 = 10$ $u = o_{\text{varm2}} \Rightarrow t_{\text{start,styr}} = 0 + 5 + 0 = 5$ $TS[o_{\text{styr}}] = \max(10, 5) = 10$, gå til 2.
	2. $v = o_{\text{kør}}, L = ()$
	3. $u = o_{\text{varm1}} \Rightarrow t_{\text{start,kør}} = 0 + 5 + 0 = 5$ $u = o_{\text{styr}} \Rightarrow t_{\text{start,kør}} = 10 + 5 + 0 = 15$ $TS[o_{\text{styr}}] = \max(5, 15) = 15$
	4. Vi er færdige
Output:	$TS = \{(o_{\text{detekt}}, 0), (o_{\text{styr}}, 10), (o_{\text{kør}}, 15), (o_{\text{varm1}}, 0), (o_{\text{varm2}}, 0)\}$



(Foto: NASA)

Ud fra TS-listen kan vi nu lave vores tidsdiagram. Vi kan se, at tre opgaver kan starte til tiden 0: o_{detekt} , o_{varm2} og o_{varm1} . Da de alle tre afvikles på forskellige komponenter, kan vi starte dem samtidigt. Den næste opgave, der må starte, er o_{styr} til tiden 10, og til sidst må $o_{\text{kør}}$ starte til tiden 15. Figur 9 viser det færdige tidsdiagram for systemet i figur 8. Af figuren kan vi se, at det tager 25 sekunder at udføre alle fem opgaver, der udgør missionen.



Figur 9. Tidsdiagrammet for det udbyggede system.

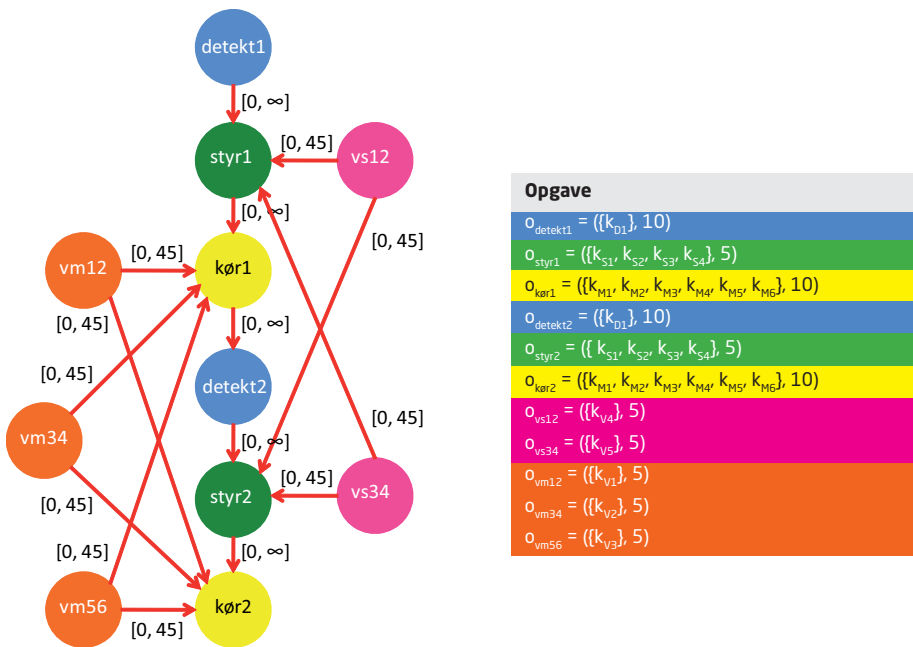
Vi har nu lært, hvordan vi ud fra en missionsgraf kan lave et tidsdiagram. Dette tidsdiagram er *tidsmæssig korrekt*, når alle tidsafhængigheder fra missionsgrafen er overholdt. Resultatet fra algoritme 1 og 2 kan skrives som en tidstabel som vist i tabel 2.

Opgave	Ressource	Starttidspunkt	Sluttidspunkt
o_{detekt}	detektor	0	10
o_{styr}	styremotor	10	15
$o_{\text{kør}}$	hjulmotor	15	25
o_{varm1}	varmer1	0	5
o_{varm2}	varmer2	0	5

Tabel 2. Tidstabel for tidsdiagrammet i figur 10.

Tilbage på Mars

Figur 10 viser missionsgrafen for Sojourner, dvs. den viser et forløb, hvor sekvensen detekter, styr og køre gentages to gange. Da opgaven køre kun bevæger Sojourner 7 cm, så skal sekvensen gentages, indtil Sojourner har nået sit mål. Når vi betragter netop to afviklinger, så er det fordi Sojourner inden for dette interval kan køre to gange ved kun en opvarmning. Vi antager, at alle varmere er uafhængige komponenter og at hver varmer kan opvarme 2 motorer på samme tid som vist i figur 3. Da vi i alt har 10 motorer, er der 5 varmere, 3 til at opvarme hjulmotorerne (k_{V1} , k_{V2} og k_{V3}) og 2 til at opvarme styremotorerne (k_{V4} og k_{V5}). De 4 styremotorer betragtes som en samlet enhed til at styre (k_{S1} , k_{S2} , k_{S3} og k_{S4}), og de 6 hjulmotorer betragtes som en samlet enhed til at køre (k_{M1} , k_{M2} , k_{M3} , k_{M4} , k_{M5} og k_{M6}) Sojourner. Endelig er der den laserbaserede komponent til detektering af forhindringer (K_{D1}). Bemærk, at tallene for udførselstid (t_i) og tidsafhængigheder er ændret i forhold til de tidligere eksempler. Vi har nu tilstrækkelig information til at løse opgaven for Sojourner.

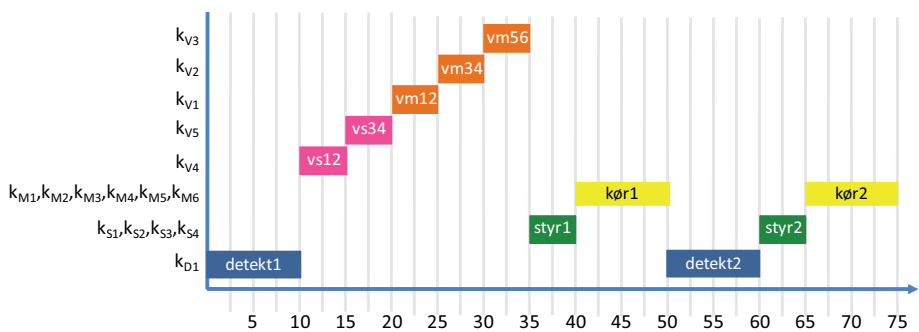


Figur 10. Den komplette begrænsningsgraf for Sojourner.

OPGAVE 1

Lav på basis af missionsgrafen i figur 10 og algoritme 1 og 2 en tidsmæssig korrekt tidstabel for Sojourner. Tegn et tidsdiagram for løsningen.

Den løsning, som NASAs ingeniører kom frem til, var baseret på, at Sojourner skulle bruge så lidt energi som muligt. Så for at sikre at Sojourner aldrig havde brug for mere energi end højst nødvendigt, benyttede de sig af en simpel strategi, som går ud på at serialisere afviklingen af opgaver. Dvs. at på intet tidspunkt må der være mere end én opgave under afvikling. Figur 11 viser NASAs løsning, der kan betragtes som en løsning, der tager højde for det værste tænkelige tilfælde.



Figur 11. NASAs løsning.

Energi

Som vi beskrev i starten af kapitlet, så kræves der energi for at udføre en opgave. Et batteri har en bestemt mængde energi til rådighed, og hver gang der udføres en opgave, bruges en del af denne energi. Da Sojourner ikke har et genopladeligt batteri, vil den kun kunne udføre en vis mængde opgaver, før dens batteri løber tør. Ud over at batteriet kun har en vis mængde energi, så er der også en øvre grænse for, hvor meget energi der kan trækkes ud af batteriet pr. sekund. Energi måles i joule, forkortet som J, og energi pr. sekund kaldes effekt og måles i Watt, forkortet som W, dvs. $W=J/s$. Hvis en opgave bruger 10W og udføres på 5 sekunder, så har den i alt brugt $10 \times 5 = 50$ J.

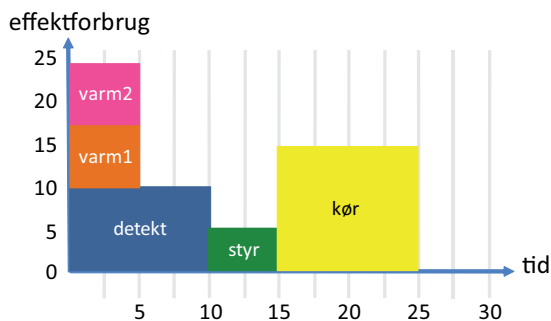
Vi kan nu udvide vores tidsdiagram, således at det også kan repræsentere, hvor meget energi der bruges til at udføre opgaverne i tidsdiagrammet, og særligt hvad der maksimalt kræves af effekt for at udføre opgaverne. Hvis vi i tidsdiagrammet lader højden af de enkelte opgaver svare til den effekt (dvs. energi pr. sekund), som opgaven kræver, så vil arealet af den firkant, som opgaven udspænder, svare til den mængde energi, opgaven skal bruge.

Lad os antage, at de 5 opgaver i vores system bruger effekt som vist i tabel 3. Vi vil i det følgende bruge det enklere eksempel fra eksempel 2.

Opgave	O_{detekt}	O_{styr}	$O_{\text{kør}}$	O_{varm1}	O_{varm2}
Effekt (W)	10	5	15	7.5	7.5

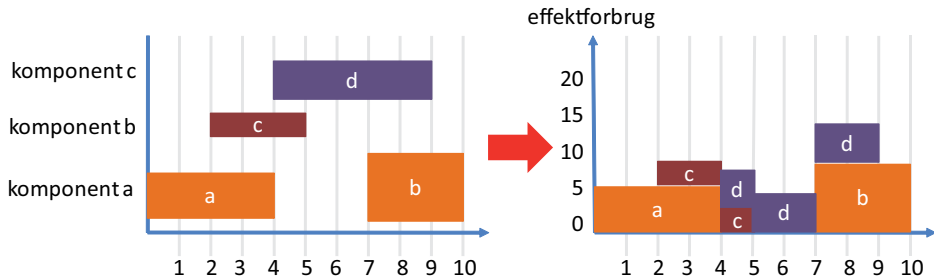
Tabel 3. Effektforbrug.

For at kunne regne på Sojourners effektforbrug er vi nødt til at tilføje en ekstra information til tidsdiagrammet, så det kan vise effektforbrug. Det gør vi ved at tilpasse højden af boksene, så den svarer til, hvor meget effekt den tilsvarende opgave bruger. Desuden tilføjer vi en akse, som vil vise effektforbruget i stedet for komponenter. Vi kan nu lave en effektprofil ved for hvert sekund at lægge effektforbruget af de opgaver, som afvikles i det givne sekund, sammen. Vi kan også gøre det ved at stable opgaverne oven på hinanden som et slags Tetris-spil. Figur 12 viser, hvordan dette *energimæssige tidsdiagram* ser ud for tidsdiagrammet i figur 9. F.eks. kan vi se, at i de 5 første sekunder afvikles opgaverne O_{varm1} , O_{varm2} og O_{detekt} , og effektforbruget i hvert sekund i de første 5 sekunder bliver $7,5W + 7,5W + 10W = 25W$, dvs. at der efter 5 sekunder er blevet brugt $5 \times 25 = 125$ J.



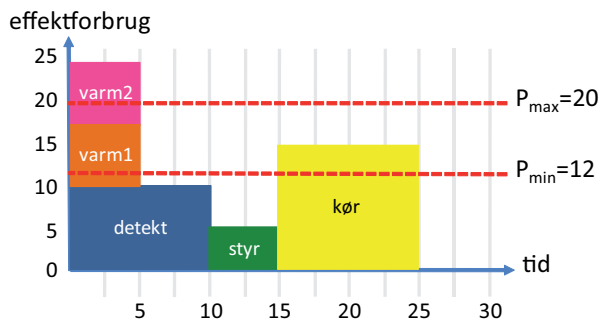
Figur 12. Det energimæssige tidsdiagram for det udbyggede system.

For at vi kan lave det energimæssige tidsdiagram ved at stable opgaverne, så kan det være nødvendigt at opdele en opgave i en række mindre opgaver som vist i figur 13.



Figur 13. Pakning af opgaver, hvor det er nødvendigt at opdele opgaverne.

Som nævnt er der en øvre grænse for, hvor meget effekt batteri og solceller kan levere, lad os kalde denne P_{\max} . I vores eksempel er den 20W. Figur 14 viser P_{\max} i forhold til energiprofilen for tidsdiagrammet. Som det kan ses, så kræver tidsdiagrammet, at der skal bruges mere effekt, end batteri og solceller kan levere i de første 5 sekunder, dvs. at det tidsdiagram, vi fandt frem til, ikke kan realiseres med det pågældende batteri. Det betyder altså, at hvis vi havde sendt Sojourner af sted med dette tidsdiagram indkodet, ville den løbe tør for energi mindre end 5 sekunder efter, den var startet. Det ville være temmelig uheldigt! Det var selvfølgelig den slags overvejelser, der ledte NASAs ingeniører til at vælge en sikker løsning.



Figur 14. Det energimæssige tidsdiagram med øvre og nedre grænse for effektforbrug.

Sojourners solceller er i stand til at levere “gratis” energi. Da batteriet på Sojourner ikke kan genoplades, vil det være en god idé, hvis Sojourner er i stand til at bruge alt denne gratis energi og herved spare på sit batteri. Vi kan udtrykke den effekt, som solcellerne kan levere, som en nedre grænse P_{\min} . I vores eksempel er den 12W, dvs. at batteriet kan levere $P_{\max} - P_{\min} = 8W$. I figur 14 kan vi se, at vi i intervallerne 0 til 5 sekunder og 15 til 25 sekunder udnytter al energien fra solcellerne, mens vi i intervallet fra 5 til 10 sekunder kun bruger 10W af de 12W, og i intervallet fra 10 til 15 sekunder kun bruger 5W. Man kan sige, at når energien fra solcellerne er gratis, så gør det ikke så meget, at

vi ikke bruger den, men blot smider den væk. Men hvis vi er i stand til at udnytte den til noget fornuftigt, så betyder det, at vi kan forlænge levetiden af batteriet og derved forlænge Sojourners mission.

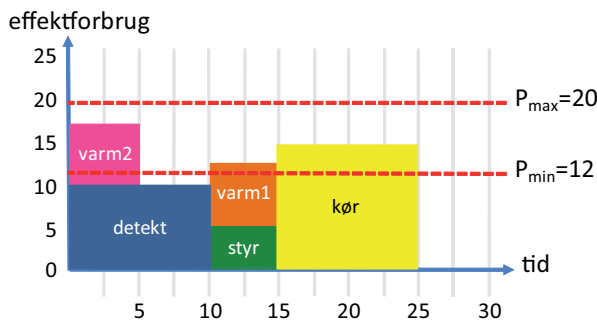
Med de øvre og nedre grænser for effektforbruget kan vi nu udvide formuleringen af vores problem;

Givet en mission M , find for hver opgave $o_i \in M$ opgavens starttidspunkt, således at alle tidsafhængigheder overholdes, at der på intet tidspunkt bruges mere end P_{max} effekt, og at den tid, hvor der bruges mindre end P_{min} effekt, minimeres.

Vi skal således finde et energioptimeret tidsmæssigt korrekt energimæssigt tidsdiagram.

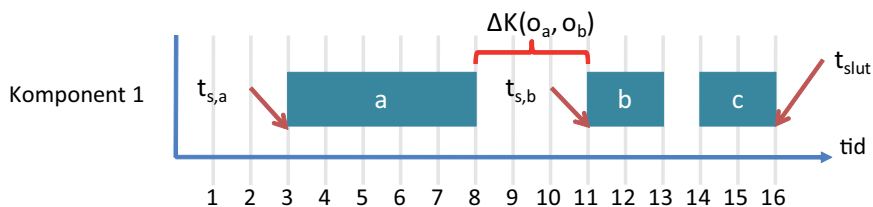
Spillerum

Det energimæssige tidsdiagram i figur 14 overholder ikke effektgrænsen på $P_{max} = 20W$ og er derfor ikke en mulig løsning. Men hvis vi nu forsinker starten af f.eks. o_{varm1} , således at denne opgave først starter efter 10 sekunder, så vil alle tidsafhængigheder stadigvæk være overholdt, og det nye energimæssige tidsdiagram, som er vist i figur 15, vil overholde effektgrænsen. Dvs. at vi ved at forskyde en opgave i tid inden for dens tidsafhængigheder har mulighed for at ændre (på) systemets effektprofil. Denne frihedsgrad vil vi kalde opgavens *spillerum*.



Figur 15. Et nyt energimæssigt tidsdiagram, der overholder P_{max} .

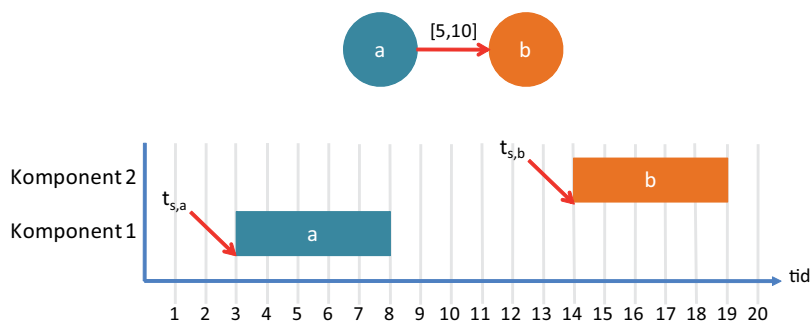
Der findes to slags spillerum: *Komponentmæssigt spillerum* og *tidsafhængighedsmæssigt spillerum*. Lad os starte med det nemmeste, nemlig det komponentmæssige spillerum, som betegnes ΔK . ΔK fortæller, hvor meget senere en opgave må starte, uden at den kommer til at overlappe med en anden opgave på den samme ressource. Figur 16 viser et eksempel, hvor $\Delta K(o_a, o_b) = 3$.



Figur 16. Komponentmæssigt spillerum.

ΔK kan, som det ses, læses ud fra tidsdiagrammet, men den kan også beregnes ud fra missionsgrafen og starttiderne for opgaverne i det korrekte tidsdiagram (eller fra tidstabellen). I figur 16 kan man også se tre andre størrelser: $t_{s,a} = 3$, $t_{s,b} = 11$ og $t_a = 5$. Af figuren ses, at det komponentmæssige spillerum beregnes som $\Delta K(o_a, o_b) = t_{s,b} - t_{s,a} - t_a$. Bemærk, at det naturligvis ikke giver nogen mening at beregne $\Delta K(o_a, o_c)$, altså det ressourcemæssige spillerum fra o_a til o_c , da o_a aldrig nogensinde kan skubbes forbi o_b for at nå hen til o_c . ΔK beregnes således kun fra en opgave til den næste opgave på samme ressource. Men hvad er ΔK så for opgave o_c i figur 16? Der kommer jo ikke nogen opgave efter o_c . I dette tilfælde tager vi højde for, at vi ikke ønsker at forsinke tidsdiagrammets afslutningspunkt, dvs. hvis der ikke er nogen opgaver efter en given opgave, så beregnes dennes ΔK som afstanden fra opgaven til tidsdiagrammets afslutningstidspunkt, kaldet t_{slut} . $\Delta K(o_c, slut) = t_{slut} - t_{s,c} - t_c$. Indsætter vi værdier fra tidsdiagrammet i figur 16, får vi altså $\Delta K(o_c, slut) = 16 - 14 - 2 = 0$, dvs. opgave o_c kan i dette tilfælde ikke flyttes nogen vegne.

Det tidsafhængighedsmæssige spillerum, kaldet ΔT , fortæller, hvor meget opgaverne kan *forsinkes* i forhold til deres min/max tidsafhængigheder. Dette forklares lettest gennem et simpelt eksempel.



Figur 17. Tidsafhængighedsmæssigt spillerum.

Figur 17 viser en missionsgraf, hvor der er en minimum afhængighed mellem opgave o_a og o_b på 5 sekunder og en maksimum begrænsning på 10 sekunder. Desuden viser figuren et tidsligt korrekt tidsdiagram. Det tidsafhængighedsmæssige spillerum udtrykker, hvor meget henholdsvis o_a og o_b kan forsinkes uden at overskride tidsafhængighederne i begrænsningsgrafen. Vi får følgende:

- Hvor meget kan o_a forsinkes, uden at minimum tidsafhængigheden til o_b overskrides? Vi kan beregne denne som $\Delta T_{\min}(o_a, o_b) = t_{s,b} - (t_{s,a} + t_a) - t_{\min,a,b}$. Sætter vi tallene ind fra figur 17, får vi $\Delta T_{\min}(o_a, o_b) = 14 - (3 + 5) - 5 = 1$, dvs. at o_a maksimalt kan forsinkes 1 sekund.
- Hvor meget kan o_b forsinkes i forhold til o_a , uden at maksimum tidsafhængigheden overskrides? Vi kan beregne denne som $\Delta T_{\max}(o_b, o_a) = (t_{s,a} + t_a) - t_{s,b} + t_{\max,a,b}$. Sætter vi tallene ind fra figur 17, får vi $\Delta T_{\max}(o_b, o_a) = (3 + 8) - 14 + 15 = 4$, dvs. at o_b maksimalt kan forsinkes 4 sekunder. Bemærk, at hvis $t_{\max} = \infty$, så bliver spillerummet også uendeligt, og vi behøver således ikke at regne det med.

For hver opgave kan vi nu bestemme ΔT_{\min} for hver pil, der går ud fra opgaven, og ΔT_{\max} for hver pil, der går ind til opgaven, og hvor $t_{\max} < \infty$. Dvs. at en opgave har maksimalt en ΔK og en eller flere ΔT . Det samlede spillerum for en opgave med k tidsafhængigheder (udgående pile) kan bestemmes som $\min(\Delta K, \Delta T_1, \dots, \Delta T_k)$, dvs. at det samlede spillerum er lig med det mindste af alle opgavens spillerum. Lad os prøve at bruge det på et eksempel.

Eksempel 3

Vi vil nu udregne spillerummet for opgaverne fra eksempel 2, og vi vil derfor bruge den velkendte tidstabel (tabel 2) og den velkendte missionsgraf (figur 8), som vi kom frem til ved at bruge algoritme 1 og 2.

I det følgende viser vi, hvordan man beregner ΔT , ΔK og det samlede spillerum for alle opgaverne i grafen fra figur 8. Da der for samtlige opgaver gælder, at de er de eneste opgaver, der afvikles på den pågældende komponent, så vil de ikke have nogen efterfølgende opgaver på deres respektive komponenter. F.eks. har opgaven o_{detekt} ikke andre opgaver, som afvikles på komponenten detektor (K_{D1}). I dette tilfælde vil vi bruge sluttidspunktet for hele systemet, dvs. $t_{\text{slut}} = 25$. Tabel 4 viser resultaterne for beregninger af ΔK , ΔT og det samlede spillerum.

Opgave	Spillerumsberegning	
o_{detekt}	$\Delta K(o_{\text{detekt}}, \text{slut}) = 25 - 0 - 10$	15
	$\Delta T_{\min}(o_{\text{detekt}}, o_{\text{styr}}) = 10 - (0 + 10) - 0$	0
	$\text{Spillerum}(o_{\text{detekt}}) = \min(15, 0)$	0
o_{styr}	$\Delta K(o_{\text{styr}}, \text{slut}) = 25 - 10 - 5$	10
	$\Delta T_{\min}(o_{\text{styr}}, o_{\text{kør}}) = 15 - (10 + 5) - 0$	0
	$\Delta T_{\max}(o_{\text{varm2}}, o_{\text{styr}}) = (0 + 5) - 10 + 10$	5
	$\text{Spillerum}(o_{\text{styr}}) = \min(10, 0, 5)$	0
o_{varm2}	$\Delta K(o_{\text{varm2}}, \text{slut}) = 25 - 0 - 5$	20
	$\Delta T_{\min}(o_{\text{varm2}}, o_{\text{styr}}) = 10 - (0 + 5) - 0$	5
	$\text{Spillerum}(o_{\text{varm2}}) = \min(20, 5)$	5
$o_{\text{kør}}$	$\Delta K(o_{\text{kør}}, \text{slut}) = 25 - 15 - 10$	0
	$\Delta T_{\max}(o_{\text{varm1}}, o_{\text{kør}}) = (0 + 5) - 15 + 10$	0
	$\text{Spillerum}(o_{\text{kør}}) = \min(0, 0) = 0$	0
o_{varm1}	$\Delta K(o_{\text{varm1}}, \text{slut}) = 25 - 0 - 5$	20
	$\Delta T_{\min}(o_{\text{varm1}}, o_{\text{kør}}) = 15 - (0 + 5) - 0$	10
	$\text{Spillerum}(o_{\text{varm1}}) = \min(20, 10) = 10$	10

Tabel 4. Spillerum for tidsdiagrammet i figur 8 og tidstabellen i tabel 2.

Ud af vores fem opgaver kan kun o_{varm1} og o_{varm2} forsinkes henholdsvis 5 og 10 sekunder. Idet vi netop har sørget for at overholde alle tidsafhængigheder, må vi altså gerne forsinke en opgave med dens spillerum, hvorefter vi stadigvæk har en tidsmæssig korrekt tidstabel. Bemærk dog, at hver gang vi forsinke en opgave, kan de andre opgavers spillerum ændre sig.

Energioptimering

Vi kan nu bruge det, vi har lært, til at optimere energiforbruget for Sojourner. Ud fra algoritme 1 og 2 kan vi finde det tidligt korrekte tidsdiagram, og ved brug af dette samt spillerummet for de enkelte opgaver kan vi bruge en ny algoritme, som udnytter, at opgaver kan forsinkes og derved sørge for, at effektforbruget aldrig overstiger P_{max} og at det så vidt muligt altid bruger P_{min} . Idéen med algoritmen er at flytte på opgaver, som vi gjorde for at få resultatet i figur 15.

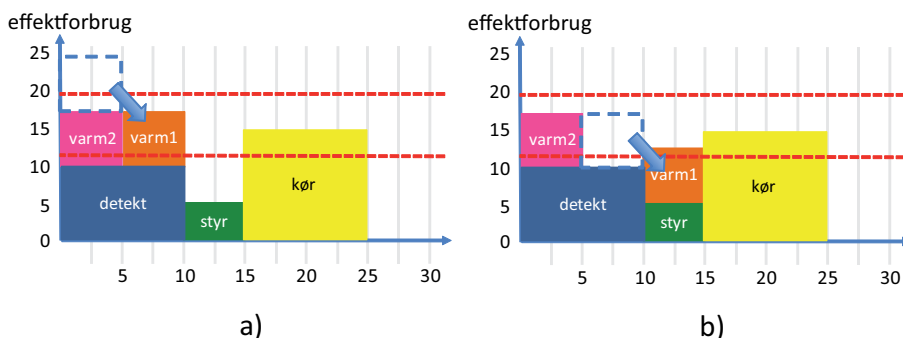
Algoritme 3 (Energioptimering):	
Input:	en missionsgraf M en mængde TS af ordnede par, der angiver den tidligste starttid for hver opgave, $(o_i, t_{s,i})$ Den maksimale effekt for batteri og solceller P_{max} Den maksimale effekt for solcellerne P_{min}
Output:	opdateret TS
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Begynd til tiden $t = 0$. 2. Beregn spillerummet for alle opgaver. 3. Lav en ordnet mængde S over opgaver, som er aktive til tiden t. Sorter disse opgaver efter størrelsen på deres spillerum, således at opgaven med det største spillerum står først, den med næststørst spillerum nummer to osv. 4. Lad effektforbruget til tiden t være P_t. P_t beregnes som summen af effektforbruget for de aktive opgaver. Hvis $P_t > P_{\text{max}}$ og der er flere opgaver i S, fjern den første opgave i S, og kald den v. Hvis $P_t \leq P_{\text{max}}$ eller der ikke er flere opgaver i S, så gå til punkt 6. 5. Forsink opgave v netop så meget inden for dens spillerum, at $P_t \leq P_{\text{max}}$ for hele tidsintervallet, hvor v er aktiv, og hvor den tid, hvor der bruges mindre end P_{min} effekt, minimeres. Det nye starttidspunkt t' for opgave v sættes ind i TS, dvs. $TS[v] = t'$. Gå til punkt 4. 6. Forøg tiden ved at sætte $t = t + 1$. Hvis der er flere opgaver med starttidspunkt $\geq t$, så gå til punkt 2, ellers gå til punkt 7. 7. TS indeholder nu de opdaterede starttider.

Algoritmen er det, man populært kalder en *grådige* algoritme, dvs. at når man har forsinkeet en opgave, må man ikke gøre dette om. Men den samme opgave må godt forsinkes yderligere af flere omgange. Grådige algoritmer er som oftest hurtige, men garanterer ikke, at man finder den bedste løsning.

Eksempel 4

Vi vil nu prøve at udføre algoritmen på opgaven fra eksempel 2. Håbet er, at vi med den nye algoritme vil kunne få en løsning, der maksimalt bruger en effekt på 20W i stedet for løsningen fra eksempel 2, som kræver 25W. Ud fra tidsdiagrammet i figur 14 og spillerummet i tabel 4 får vi:

Afvikling af Algoritme 3 (Energioptimering):	
Input:	missionsgraf M fra figur 8 $TS = \{(o_{\text{detekt}'}, 0), (o_{\text{styr}'}, 10), (o_{\text{kør}'}, 15), (o_{\text{varml}'}, 0), (o_{\text{varml}'}, 0)\}$ $P_{\text{max}} = 20$ $P_{\text{min}} = 12$
	1. $t = 0$
	2. Spillerum fra tabel 4
	3. $S = (o_{\text{varml}'}, o_{\text{varml}'}, o_{\text{detekt}'})$
	4. $P_0 = 10 + 7.5 + 7.5 = 25 > 20$ $v = o_{\text{varml}'}, S = (o_{\text{varml}'}, o_{\text{detekt}'})$
	5. o_{varml} må flyttes op til 10 sekunder. Hvis vi flytter den 5 sekunder, kommer effektforbruget ikke på noget tidspunkt til at overstige 17,5 W som vist i figur 18a. Men her kan vi også se, at der i tidsrummet fra 10 til 15 sekunder kun bruges 5W ud af de 12W, der er mulige, dvs. at vi ikke udnytter den gratis energi på $5 * 7 W = 35 J$, som solcellerne genererer. Hvis vi flytter opgaven 10 sekunder, kan vi i figur 18b se, at det nu kun er $5 * 2 W = 10 J$. Dvs. at den bedste løsning for opgave o_{varml} er at forsinke den 10 sekunder. $TS[o_{\text{varml}}] = 10$. Gå til punkt 4.
	4. $P_0 = 10 + 7,5 = 17,5 < 20$ Gå til punkt 6.
	6. Sæt $t = 1$, og da der er flere opgaver med starttid ≥ 1 , gå til punkt 2.
	2. Nu skal vi beregne alle spillerum igen (dvs. udføre det, der står i eksempel 2 dog med de nye tal), og herfra fortsætter algoritmen ...
	...



Figur 18. Effektforbrug, når VHM forsinkes a) 5 sekunder og b) 10 sekunder.

Når algoritmen er færdig, får vi det endelige energimæssige tidsdiagram som vist i figur 18b og den tilhørende tidstabel som angivet i tabel 5. I dette tilfælde var der ikke flere opgaver, som skulle flyttes, før alle opgaver ligger under P_{\max} .

Opgave	Ressource	Starttidspunkt	Sluttidspunkt
O_{detekt}	detektor	0	10
O_{styr}	styremotor	10	15
$O_{\text{kør}}$	hjulmotor	15	25
O_{varm1}	varmer1	10	15
O_{varm2}	varmer2	0	5

Tabel 5. Tidstabel for tidsdiagrammet i figur 18b.

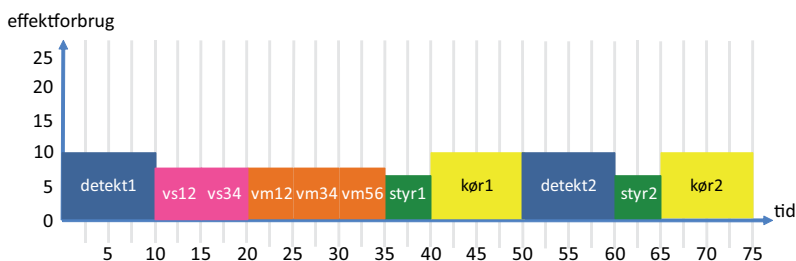
Tilbage på Mars igen

NASAs løsning af missionsgrafen i figur 10 var en serialisering af alle opgaver, som vi viste i figur 11. Tabel 6 viser effektforbruget for de 11 opgaver i missionen. Bemærk, at disse er lidt forskellige fra dem, vi brugte i eksempel 3. Effektgrænserne er også forskellige fra tidligere, idet $P_{\min} = 15W$ og $P_{\max} = 25W$.

Opgave	O_{detekt1} O_{detekt2}	O_{styr1} O_{styr2}	$O_{\text{kør1}}$ $O_{\text{kør2}}$	$O_{\text{vs1,2}}$ O_{vs34}	$O_{\text{vm1,2}}$ O_{vm34} O_{vm56}
Effekt (W)	7,5	6,5	10	7,5	7,5

Tabel 6. Effektforbrug for opgaverne i missionsgrafen fra figur 10.

Tegner vi et energimæssigt tidsdiagram fra figur 11, får vi NASAs løsning som vist i figur 19. NASA implementerede denne løsning som en fast løsning i Sojourners computer, dvs. at ligegyldigt hvordan forholdene på Mars' overflade ændrede sig over tid, ville Sojourner altid udføre opgaverne i den givne rækkefølge. Det er nu din opgave at bruge det, vi har lært, til at komme frem til en bedre løsning end NASAs ingeniører!



Figur 19. Det energimæssige tidsdiagram for NASAs løsning.

OPGAVE 2

Ud fra det tidsmæssigt korrekte tidsdiagram for Sojourner, som blev beregnet i opgave 1, lav nu et tidsdiagram, som også er energimæssigt korrekt ved brug af algoritme 3.

Den løsning, du kom frem til i opgave 2, skulle gerne vise sig at være 50 % hurtigere end NASAs og stadigvæk holde sig inden for de givne effektgrænser!

Perspektiver

Selvom opgaven er forenklet i forhold til den rigtige Sojourner, så illustrerer øvelserne i dette kapitel potentialet ved at lave en dynamisk løsning, dvs. en løsning, der løbende tilpasser sig de ydre forhold. Til forskel fra den statiske løsning, som NASA valgte, så kunne man have implementeret algoritme 1 og 2 i Sojourners computer, således at den selv kunne finde den bedste løsning under de givne forhold. Temperaturen på Mars' overflade kan komme helt ned på $-80\text{ }^{\circ}\text{C}$ og op til $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$, når vejret er bedst. Jo koldere det er, jo mere energi skal der bruges til at opvarme de enkelte motorer. Og når vejret er dårligt, vil solcellerne generere mindre energi. De tal, vi har brugt i dette kapitel, er baseret på gunstige vejrforhold, dvs. når temperaturen er $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ og solcellerne kan levere en effekt på 15W. Under de værst tænkelige forhold, som jo var det, NASAs ingeniører var nødt til at regne med, kræver hver opgave mere effekt, og solcellerne kan kun levere 9W. Det betyder, at løsningen i figur 19 bliver langt mindre fordelagtig, selvom den stadigvæk holder sig inden for effektgrænserne.

Med en dynamisk løsning ville Sojourner kunne køre hurtigere, når der var gunstige vejrforhold, og så skifte til en langsommere kørsel, når vejret skiftede. Denne metode til at benytte it til at skabe energibevidste systemer kan bruges i rigtig mange sammenhænge, hvor man ønsker at spare energi og reducere CO_2 -udslip. F.eks. i biler, hvor man bruger det til at styre mængden af benzin til motoren, således at man får den bedste mulige forbrænding og derved en bil, der kører langt på literen og forurener mindre. Det bruges også i stigende grad til at gøre bygninger mere intelligente, således at samspillet mellem lys, varme og ventilation styres optimalt. Det er f.eks. en dårlig idé at øge ventilationen uden også at sænke temperaturen, hvis en del af bygningen er blevet for varm. Ligesom i eksemplet med bilen drejer det sig om løbende at justere brugen af energi. Du har igennem dette kapitel fået en introduktion til de metoder og principper, der ligger til grund for udviklingen af energibevidste it-systemer, populært kaldet grøn it.

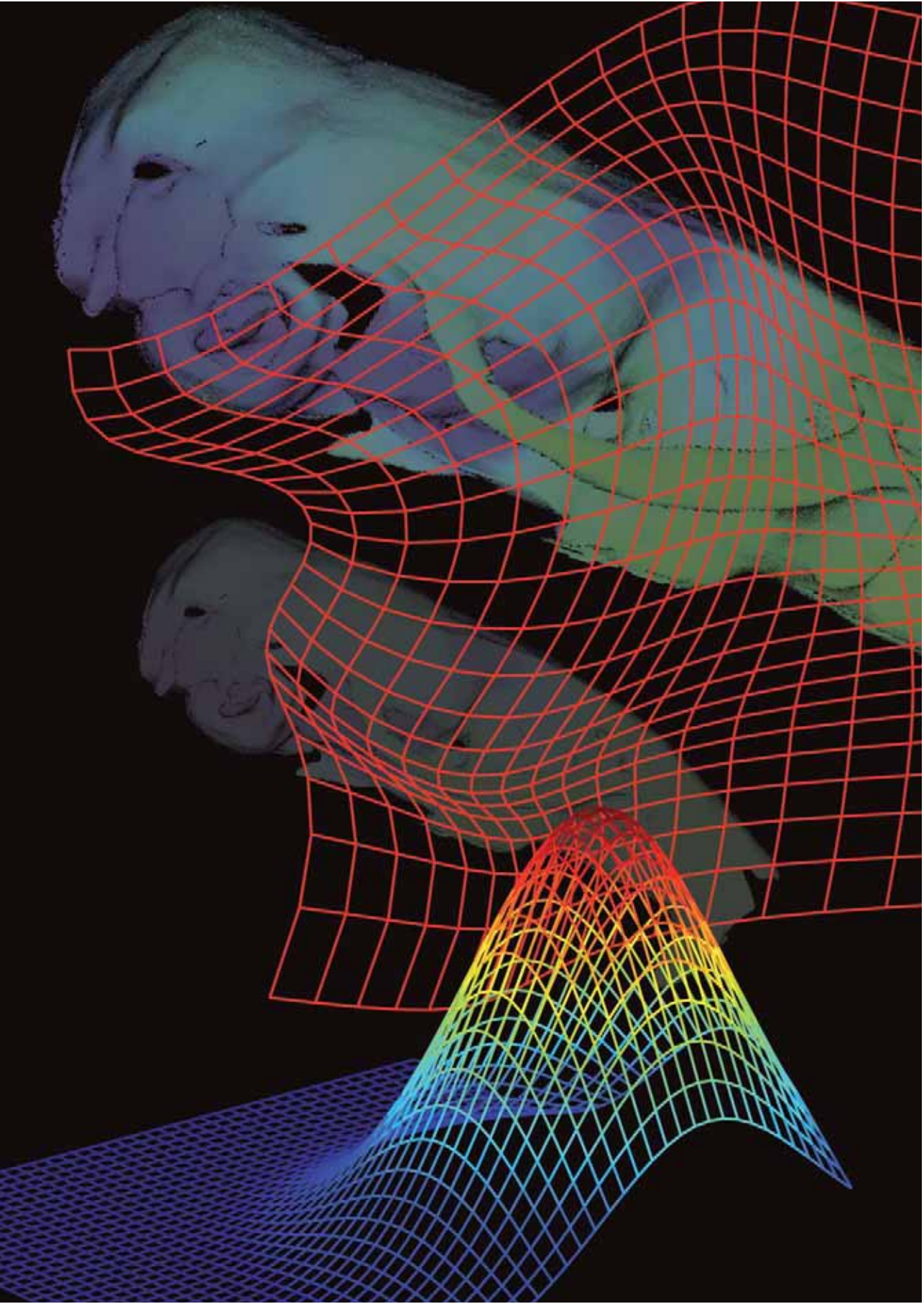
Artiklens forfattere



Professor Jan Madsen



Ph.d.-studerende Michael Reibel Boesen



Når matematikken tager form

Af Ph.d. Mads Fogtmann Hansen og Professor Rasmus Larsen,
DTU Informatik

I 1970'erne blev 3D ikke-invasive billeddannelsesteknikkerne introduceret, og siden da er røntgen Computer Tomografi (CT) og Magnetisk Resonans (MR) benyttet som en integreret del af diagnosticering af sygdomme, evaluering af progression af sygdom samt sygdomsbehandling. Computerassisteret medicinsk billedanalyse har efterfølgende udviklet sig voldsomt, og området vil spille en endnu større rolle i fremtidens diagnosticering og behandling af patienter.

Radiologer og læger fortolker medicinske billeder ved at knytte deres viden om anatomi, organer og patologiske tilstande til den information, der findes i billederne i form af struktur og mønstre. I nær fremtid vil fortolkningen sandsynligvis blive suppleret af specieludviklet software. Derved kan flere læger frigives til den egentlige sygdomsbehandling. Nyere forskning har også påvist, at sofistiskerede matematiske modeller kan bidrage, varetage og måske endda forbedre lægers fortolkning, idet computere i højere grad end et menneske er i stand til at opfange små ændringer i eksempelvis formen af et organ. I sygdomsdiagnostik er fortolkningen af et billede baseret på identifikation af afvigelser fra *normalen*, mens evalueringen af progressionen af sygdom og behandling bygger på identificering af ændringerne *siden sidst*. Fortolkningen af medicinske billeder er i vid udstrækning et spørgsmål om at identificere ændringer i form i forhold til en reference.

Computerassisteret medicinsk billedanalyse har i forskningssammenhæng øget vores forståelse for menneskets mekaniske, fysiske samt biokemiske funktion (humanfysiologi). Dette er bl.a. opnået ved opbygning af avancerede matematiske og statistiske modeller, der kan beskrive sammenhængen mellem humanfysiologien og morfologien (studiet af biologisk form og struktur). Nye studier har belyst sammenhængen mellem forandringer i hjernen og patologiske tilstande som Alzheimers, Parkinsons og demens. Derved vil man blive i stand til at opdage og behandle disse sygdomme tidligere og mere præcist vurdere graden af tilstanden.

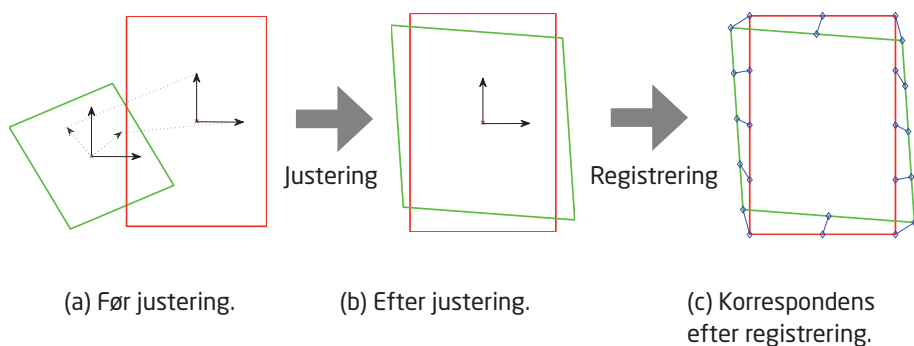
Introduktion til form og morfologi

Form er et velkendt begreb, men når begrebet skal give mening i fortolkningsøjemed, skal formen kunne kvantificeres i forhold til en reference. Det er med andre ord nødvendigt at fjerne den forskel, som kan tilskrives rotation, placering eller skalering. I dette kapitel vil følgende definition af form benyttes:

Definition: Form

Form er al geometrisk information, som er tilbage, når alle placerings-, rotations- og skalerings effekter er filtreret fra objektet.

For at kunne filtrere disse effekter fra og kvantificere den tilbageværende geometriske information har vi brug for et referencekoordinatsystem. Processen, som transformerer to eller flere objekter til det samme koordinatsystem og dermed filtrerer nævnte effekter fra, kaldes for *justering*. Efter justering er det muligt at beskrive formen af et målobjekt kvantitativt ud fra den tilbageværende afstand til referenceobjektet. Der eksisterer mange måder, hvorpå man kan måle afstanden mellem formen eller strukturen af objekter af samme type, dog kræver langt de fleste afstandsmål, at man kender den fysiske korrespondens mellem objekterne. Vi kalder processen, som etablerer eller finder korrespondenser, for *registrering*. Figur 1 illustrerer processerne justering og registrering mellem to firkanter.



Figur 1. I (a) findes et målobjekt (grøn) samt referenceobjektet (rød), som hver har deres respektive koordinatsystemer. Efter justering er de begge placeret i referencekoordinatsystemet, jf. (b). Vha. registrering opnås der korrespondens mellem objekterne, hvilket er illustreret med de blå streger i (c).

Definitionen af form fortæller, at vi skal estimere den geometriske transformation mellem to objekter, som minimerer indbyrdes skalering, rotation og translation, før forskellen i form kan analyseres. Denne type af transformation kaldes normalt for similaritets transformationen, og den kan i 2D skrives på formen

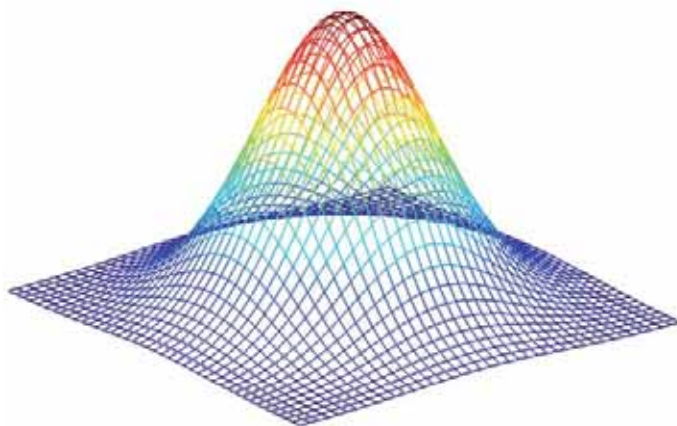
$$\phi(\mathbf{x}; s, \alpha, \mathbf{t}) = (s+1) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mathbf{x} + \mathbf{t} = (s+1) \mathbf{R} \mathbf{x} + \mathbf{t} \quad (1.1)$$

hvor \mathbf{x} er positionen, som skal flyttes, s er skaleringsfaktoren, α er rotationsvinklen, og \mathbf{t} indeholder translationen i første- og anden-aksen. Den benyttede parameterisering i (1.1) kan med fordel omskrives til

$$\phi(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1+p_1 & -p_2 \\ p_2 & 1+p_1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & 1 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{p} \quad (1.2)$$

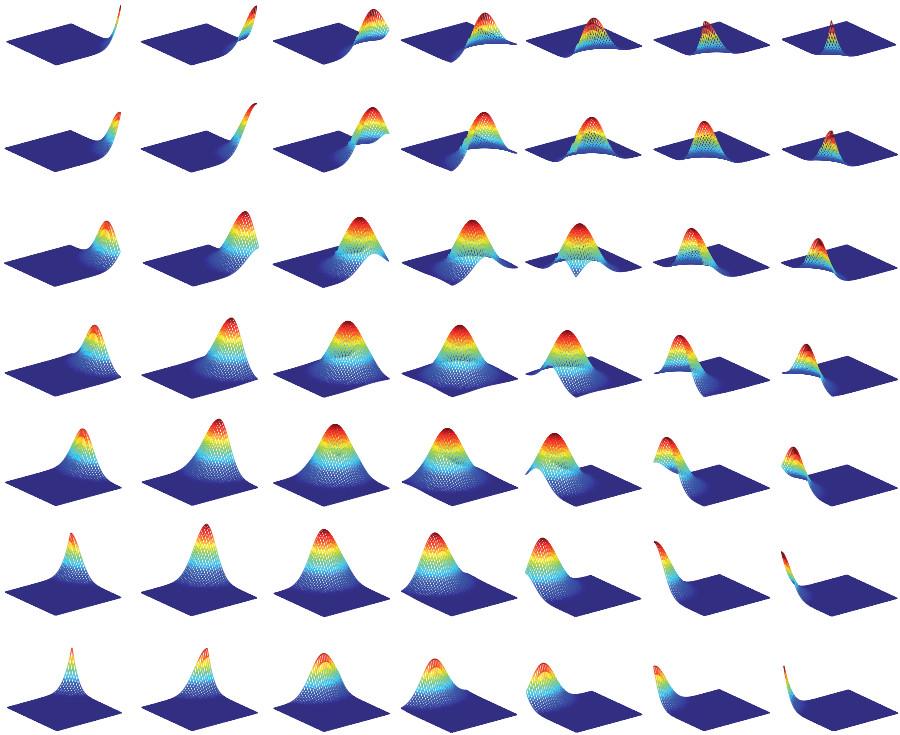
hvor \mathbf{p} er de nye transformationsparametre.

Efter justering skal den tilbageværende geometriske information kvantificeres, hvilket kræver, at man identificerer korrespondensen mellem mål- og referenceobjektet. Korrespondens kan både blive repræsenteret ved et endeligt antal korrespondenspunkter, som i figur 1(c), eller vha. af endnu en geometrisk transformation, som kan afbilde, hvilken som helst position i referenceobjektet til den tilsvarende position i målobjektet. I registrering af billeder modelleres den geometriske transformation mellem to objekter normalt med en lineær kombination af basisfunktioner, som er relative simple funktioner. Et typisk eksempel på en basisfunktion er den Gaussiske radiale basisfunktion (GRBF), $r_i(\mathbf{x}) = \exp(-\alpha \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|^2)$, som er en klokkeformet funktion med centrum i \mathbf{c}_i , jf. figur 2.



Figur 2. 2D Gaussisk radial basisfunktion.

En GRBF alene er ikke i stand til at modellere særlig interessante funktioner, men ved at kombinere en mængde GRBF'er med forskellige centre er det muligt at danne mere komplekse funktioner. Figur 3 viser 49 identiske GRBF'er, hvis centre ligger forskudt i et regulært net. Ud fra basisfunktionerne konstrueres en ny funktion ved at multiplicere hver enkel basisfunktion med en vægt og dernæst summere de vægtede basisfunktioner sammen.



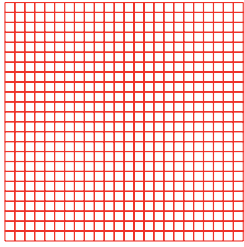
Figur 3. 2D Gaussiske radiale basisfunktioner placeret i et regulært net. Farven og højden af fladen er proportional med værdien af $r_i(\mathbf{x})$.

Vi modellerer derfor den geometriske transformation mellem to objekter med

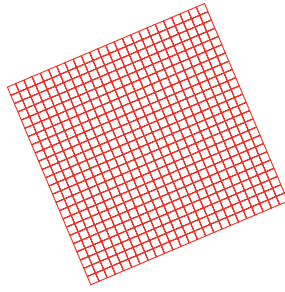
$$\phi(\mathbf{x}; \mathbf{p}) = \mathbf{x} + \sum_{i=1}^m r_i(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} p_i \\ p_{i+m} \end{pmatrix} = \mathbf{x} + \begin{pmatrix} r_1(\mathbf{x}) & \cdots & r_m(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_1(\mathbf{x}) & \cdots & r_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \mathbf{p} = \mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{p} \quad (1.3)$$

hvor $r_i(\mathbf{x})$ er den i 'ne basisfunktion og $[P_i \ P_{i+m}]^T$ er den tilhørende vægt. P_i vægter den i 'ne basisfunktion i den første akse, mens P_{i+m} vægter den i 'ne basisfunktion i den anden akse.

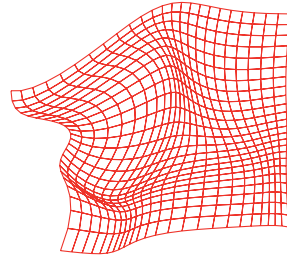
Figur 4 giver to eksempler på transformationer, som henholdsvis kan modelleres af (1.1,1.2) og (1.3). Figur 4(b) viser resultatet af en transformation af det regulære net i figur 4(a) foretaget med (1.1,1.2), og figur 4(c) viser resultatet af en transformation af det regulære net i figur 4(a) foretaget med (1.3).



(a) Regulært net.



(b) Roteret (23°),
skaleret (-0.1),
translateret (10, -5) net.



(c) Ikke-rigigt deformeret net.

Figur 4. Figuren giver to eksempler på to transformationer, som kan dannes ved henholdsvis (1.2) og (1.3). (b) indeholder det regulære net fra (a) efter rotation, skalering og translation. (c) indeholder ikke-rigigt deformeret version af nettet fra (a), som er dannet vha. Gaussiske radiale basisfunktioner.

OPGAVE 1

α og s styrer henholdsvis rotation og skalering i den geometriske transformation i (1.1). Hvilket punkt roterer og skalerer (1.1) punktet x omkring?

OPGAVE 2

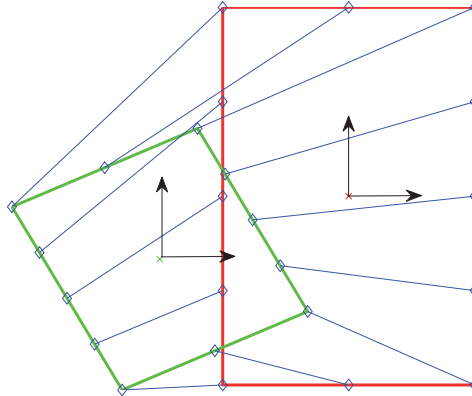
Forstå omskrivningen fra (1.1) til (1.2), og forklar, hvorfor de beskriver den samme transformation.

Billedregistrering

I de følgende afsnit vil der blive præsenteret en semi-automatisk og en automatisk metode til etablering af korrespondens.

Landmark baseret registrering

I landmark baseret registrering etableres der korrespondens mellem et reference- og et målbillede ved at placere et antal korrespondancepunkter manuelt, som kaldes for landmark, i begge billeder, jf. figur 5. Den manuelle placering af landmarks kaldes for annotering, og den skaber et korresponderende sæt af punkter, $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ og $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, hvor punktet x_i i referencebilledet svarer til punktet y_i i målbilledet. Situationen er illustreret i figur 5.



Figur 5. Illustration af korrespondens fra manual annotering.

Før den manuelle opnåede korrespondens kan bruges til kvantificering og analyse af form, er det i henhold til definitionen af form nødvendigt at fjerne placerings-, rotations- samt skalerings effekter.

Hvis det antages, at differensen mellem punkt-sættene $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$ og $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m\}$ udelukkende skyldes en similaritetstransformation, får vi følgende ligningssystem ved indsættelse i (1.2):

$$\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} y_{i1} - x_{i1} \\ \vdots \\ y_{in1} - x_{in1} \\ y_{i2} - x_{i2} \\ \vdots \\ y_{in2} - x_{in2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i1} & -x_{i2} & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{in1} & -x_{in2} & 1 & 0 \\ x_{i1} & x_{i2} & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{in1} & x_{in2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p} = \mathbf{X}\mathbf{p} \quad (1.4)$$

hvor x_{ij} er i 'ne komponent i j 'te punkt i referencen.

I de tilfælde, hvor antagelsen ikke holder, vil der ikke eksistere en løsning til (1.4), da der vil være flere ligninger (rækker) end ubekendte (søjler). Vi søger derfor en approksimativ løsning på (1.4), som bestemmer \mathbf{p} ved at minimere de kvadratiske afvigelser mellem venstre- og højresiden af (1.4). I praksis betyder dette, at det optimale \mathbf{p} vil beskrive den similaritetstransformation, som minimerer den gennemsnitlige afstand mellem de korresponderende landmarks, og den grønne firkant i figur 5 vil blive transformeret således, at man opnår situationen, som er vist i figur 1 (b-c).

Det optimale \mathbf{p} specificerer altså minimummet af objektfunktionen

$$\begin{aligned} c(\mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^n \|\mathbf{y}_i - \phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{p})\|^2 = (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i - \mathbf{X}\mathbf{p})^T (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i - \mathbf{X}\mathbf{p}) \\ &= \mathbf{p}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{p} + (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)^T (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i) - 2\mathbf{p}^T \mathbf{X}^T (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (1.5)$$

For et minimum af $c(\mathbf{p})$ må det nødvendigvis gælde, at alle af de partielle afledede er lig med nul, dvs.

$$\frac{\delta c(\mathbf{p})}{\delta \mathbf{p}} = 2\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{p} - 2\mathbf{X}^T (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{p} = \mathbf{X}^T (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i) \quad (1.6)$$

Hvis $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ har fuld rank, kan \mathbf{p} bestemmes ved

$$\mathbf{p} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i) \quad (1.7)$$

Figur 6 giver et eksempel på landmark baseret justering vha. (1.7). I referencebilledet og målbilledet er der placeret 56 korresponderende landmarks-par (jf. figur 6(a,b)), og ved indsættelse i (1.7) opnås et resulterende billede som vist i figur 6(c).



(a) Referencebillede

(b) Målbillede

(c) Justeret målbillede

Figur 6. Eksempel på justering ved (1.7).

OPGAVE 3

Opsæt et ligningssystem tilsvarende (1.4) for (1.3). Kan dette system simplificeres, og i givet fald hvordan? Hvor mange landmarks skal der som minimum bruges, før der eksisterer en unik løsning på ligningssystemet?

Intensitetsbaseret registrering

Brugen af manuel interaktion til etablering af korrespondens mellem billeder er i mange tilfælde urealistisk, idet den manuelle annotering ofte er besværlig og tidskrævende – og derved er den forbundet med store omkostninger. I stedet tilsigtes der ofte en automatisk løsning, hvor korrespondens mellem to billeder etableres ved at deformere det ene billede således, at forskellen mellem billederne mindskes. Den underliggende antagelse er, at strukturerne i billederne begynder at matche, når ligheden mellem billederne vokser. Før vi kigger nærmere på billedregistrering, er det nødvendigt, at præcisere begrebet *billede*.

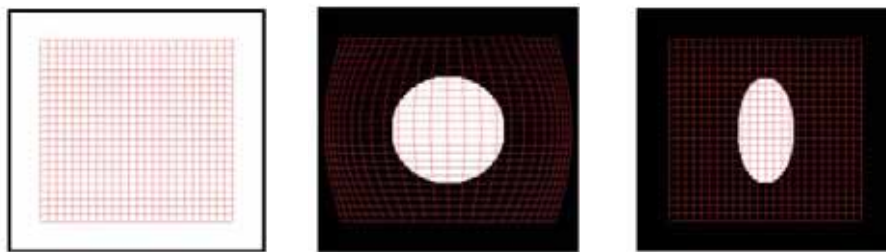
Teoretisk set er et billede en funktion I , som til hvilken som helst fysisk position \mathbf{x} knytter en værdi $I(\mathbf{x})$. I praksis repræsenterer man et billede ved at knytte en værdi til et endeligt antal punkter (pixels), som er placeret i et regulært net. I det følgende bruger vi

Ω til at betegne mængden af pixelpositioner i et billede. Til at lukke hullet mellem den teoretiske definition af et billede og den praktiske repræsentation af et billede benyttes en *interpolator*, som givet en praktisk repræsentation er i stand til at *interpolere* en værdi til hvilken som helst fysisk position. Interpolation vil ikke blive behandlet yderligere.

Til at måle graden af lighed mellem to billeder benyttes et såkaldt dissimilaritetsmål, som evaluerer ligheden med en værdi, som er høj, når billederne er meget forskellige, og nul, når billederne er identiske. Det mest intuitive og et af de mest benyttede dissimilaritetsmål er summen af de kvadratiske afvigelser mellem billederne

$$D(\mathbf{p}; R, T) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} (T(\phi(\mathbf{x}; \mathbf{p})) - R(\mathbf{x}))^2 \quad (1.8)$$

hvor R er referencebilledet og T er målbilledet. (1.8) skal læses således, at man summerer over hver enkelt pixel i referencebilledet og beregner den kvadrerede difference mellem pixelværdien i referencebilledet og værdien i den tilsvarende position, defineret ved transformationen $\phi(\mathbf{x}; \mathbf{p})$, i målbilledet. Man kan let blive foranlediget til at tro, at det er referencebilledet, man deformerer i (1.8), idet man tager en position \mathbf{x} i referencebilledet og transformerer den til $\phi(\mathbf{x}; \mathbf{p})$. Det er dog det lige modsatte, der sker, idet man substituerer \mathbf{y} i $T(\mathbf{y})$ med transformationen $\phi(\mathbf{x}; \mathbf{p})$, og målbilledet bliver dermed en funktion af position \mathbf{x} i referencekoordinatsystemet. Denne observation er visualiseret i figur 7.



(a) Regulære net Ω i referencekoordinatsystemet.

(b) Originalt billede $T(\mathbf{y})$ med deformeret net $\Phi(\Omega; \mathbf{p})$.

(c) Transformeret billede $T(\Phi(\mathbf{x}; \mathbf{p}))$ i referencekoordinatsystemet med regulære net Ω .

Figur 7. Illustration af billeddeformation i billedregistrering.

I modsætning til (1.5) kan man ikke finde en eksplicit form til bestemmelse af minimum af (1.8), og man vil derfor normalt benytte en iterativ optimeringsmetode, som fra et kvalificeret startgæt gradvist nærmer sig en optimal løsning. Pga. formen af (1.8) kan man med fordel benytte Gauss-Newtons metode til at finde minima.

Gauss-Newton optimering

Gauss-Newton er en metode til at finde minima af funktioner, som kan udtrykkes som den kvadratiske sum af en sekvens af funktioner f_1, f_2, \dots, f_k , dvs.

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k f_i^2(\mathbf{x}) \quad (1.9)$$

Gauss-Newton metoden finder et minimum af $F(\mathbf{x})$ ved iterativt at opdatere det nuværende gæt, $\mathbf{x}^{(i)}$, på minimum med et bedre gæt, $\mathbf{x}^{(i+1)} \leftarrow \mathbf{x}^{(i)} + \Delta\mathbf{x}$, hvor $\Delta\mathbf{x}$ er opdateringen. For at estimere $\Delta\mathbf{x}$ indsætter vi $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ i (1.9) og får

$$F(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k f_i^2(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \quad (1.10)$$

Vi laver herefter en første-ordens Taylor rækkeudvikling af f_i omkring \mathbf{x} og får følgende approksimation

$$F(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left(f_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Delta\mathbf{x} \right)^2 \quad (1.11)$$

Hvis $F(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$ er et minimum, må det nødvendigvis gælde, at de partielle afledede mht. $\Delta\mathbf{x}$ er lig med nul, dvs.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})}{\partial \Delta\mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \left(f_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Delta\mathbf{x} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \Delta\mathbf{x} &= - \sum_{i=1}^k \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f_i(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \\ (\mathbf{J}^T \mathbf{J}) \Delta\mathbf{x} &= -\mathbf{J}^T \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = [f_1(\mathbf{x}) \quad \dots \quad f_k(\mathbf{x})]^T, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} & \dots & \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (1.12)$$

Hvis $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ har fuld rang, kan $\Delta\mathbf{x}$ bestemmes ved at invertere $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$. Pga. rækkeudviklingen er der ingen garanti for, at $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ nødvendigvis medfører en lavere værdi af $F(\mathbf{x})$ end \mathbf{x} , men der eksisterer en længde α , som er større end 0 (og mindre end 1), således at $\mathbf{x} + \alpha \Delta\mathbf{x}$ giver en lavere værdi. Længden α findes normalt vha. en line-search algoritme, som ikke vil blive behandlet nærmere. Alternativt kan man udvide (1.12) til

$$(\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I}) \Delta\mathbf{x} = -\mathbf{J}^T \mathbf{f} \quad (1.13)$$

hvor λ er en såkaldt dæmpningsparameter. I lighed med α vil λ normalt blive justeret løbende under optimeringsprocessen, men til brug i det følgende er det tilstrækkeligt at holde λ konstant på 1.

Følgende opskrift kan benyttes til at finde minima for funktioner af typen (1.9):

1. Beregn $\Delta\mathbf{x}$ ved (1.13) med $\lambda=1$.

2. Opdater $\mathbf{x}^{(i+1)} \leftarrow \mathbf{x}^{(i)} + \Delta\mathbf{x}$.

3. Hvis $\left\| \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\|^2 < \varepsilon^2$, hvor ε er et lille tal, stop, ellers gå til 1.

OPGAVE 4

Forklar, hvorfor (1.8) matcher formen i (1.9).

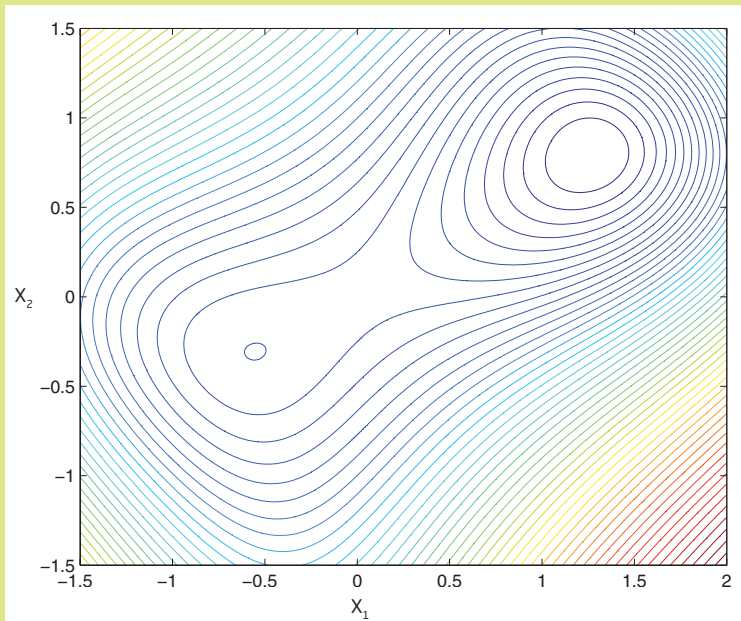


OPGAVE 5

Hvorfor er det meningsfuldt at stoppe optimeringen, når $\left\| \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\|^2 < \varepsilon^2$ er opfyldt? Hint: Hvad må der nødvendigvis gælde for et optimum?

OPGAVE 6

Funktion $F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(1 + x_1 x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - \frac{1}{4}x_1^2)^2$ svarer til formen i (1.9), og Gauss-Newton metoden kan derfor bruges til at finde minima for funktionen. Find de partielle afledede af $F(\mathbf{x})$, og benyt dernæst Gauss-Newton metoden til at finde minima. Forsøg med forskellige initiale værdier for \mathbf{x} , og indtegn iterationsforløbet i nedenstående figur, som indeholder et konturplot af $F(\mathbf{x})$.



Applikationer

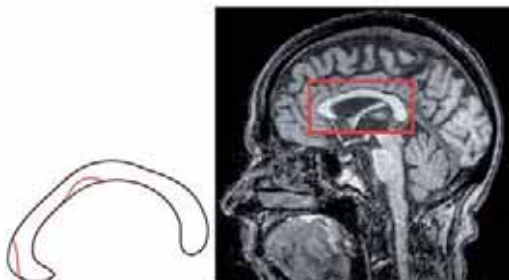
For at motivere billedregistrering vil dette afsnit give tre eksempler på applikationer, hvor billedregistrering er fundamentet for applikationen. Alle applikationer er helt eller delvist udviklet på DTU Informatik inden for de seneste 5 år.

Morfometrisk analyse af neurologiske sygdomme

Inden for den neuromedicinske verden benyttes billedanalyse ofte til at foretage nøjagtige kvantificeringer af vækst og svind i væv i hjernen, som efterfølgende kan rela-

teres til kognitive målinger og målinger af motorisk evne. Nyere studier har bl.a. påvist sammenhæng mellem patologiske tilstande som Alzheimers og Parkinsons og svind i hjernevæv i specifikke områder af hjernen. Disse resultater har medført, at man i fremtiden vil være i stand til at diagnosticere og behandle sådanne tilstande langt tidligere, hvilket vil øge livskvaliteten for de personer, som måtte rammes af disse sygdomme. Ligeledes har billedregistrering bidraget til en øget forståelse for konsekvenserne (tab af hjernevæv) af et overdrevet alkoholforbrug samt givet en indikation på, i hvilken omfang disse skader er kroniske.

Et studie foretaget af DTU Informatik og MR-afdelingen ved Hvidovre Hospital har bl.a. vist en sammenhæng mellem den maksimale gå-hastighed og afvigelser fra gennemsnitformen af hjernebjælken, der er et fiberbundt, som strækker sig på tværs af hjernen og forbinder de forskellige centre i de to hjernehalvdele. Studiet omfattede 600 ældre personer, som fik MR-scannet deres hjerne og testet deres gå-hastighed. For alle personer i studiet blev formen af hjernebjælken kvantificeret ved at registrere formen af hjernebjælken til den gennemsnitlige hjernebjælke for normale personer vha. af en såkaldt Active Appearance Model. Herefter var det muligt statistisk at identificere to deformationstendenser fra den gennemsnitlige hjernebjælke, som kunne relateres til den maksimale gå-hastighed. Den gennemsnitlige hjernebjælke med indtegning af de to deformationstendenser samt et MR-billede af hjernebjælken er vist i figur 8.

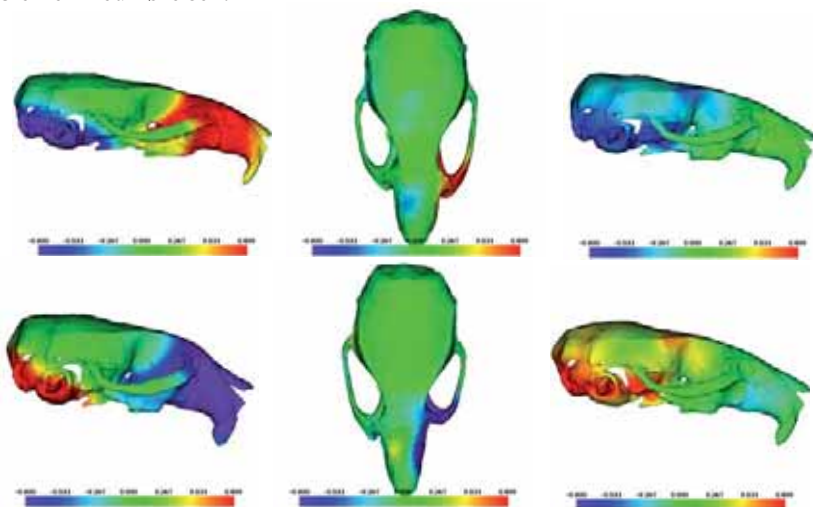


Figur 8. Hjernebjælken og alderdomssvækkelse. Den øverste afvigelse svarer til atrofi af de hjernefibre, der forbinder motor-kontrol centrene, afvigelse til venstre svarer til atrofi af fibre, der forbinder de kognitive centre.

Crouzon syndrom

Når et nyfødt barn kommer til verden, består dets kranie af fem hoveddele, som er adskilt af suturer eller såkaldte væksthoner. I sjældne tilfælde (1:20.000) vokser væksthonerne for tidligt sammen med det resultat, at kraniet begynder at vokse anormalt og skævt. Ved at studere genmanipulerede mus med Crouzon syndrom og sammenligne dem med normale mus opnår man en øget viden om sygdommens udviklingsforløb, og denne viden kan bruges til at lette planlægningen og forbedre resultatet af operationer på børn med Crouzon syndrom. Figur 9 viser det gennemsnitlige musekranie samt et musekranie fra en mus med Crouzon syndrom, som er farvekodet med deres indbyrdes afstande. Nedenstående kranier er udtrukket fra Micro-CT-scanninger af mus, og afstandsfarvningen er opnået ved at etablere korrespondens vha. billedregistrering. Fra figur 9 observerer vi, at Crouzon-musens kranie er højere, bredere, kortere og asymme-

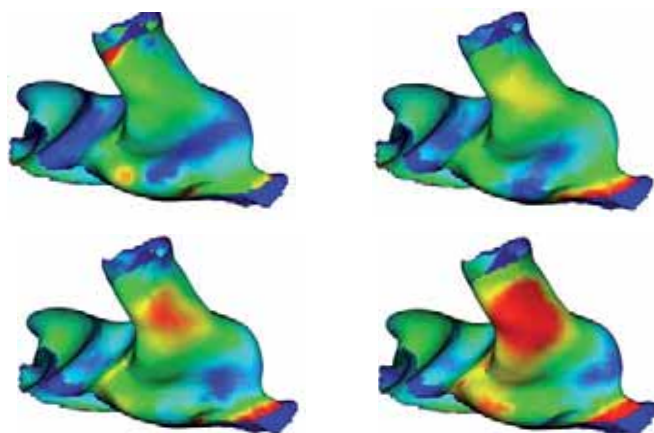
trisk. Forskningen på Crouzon-mus har desuden vist, at mellemøret på en Crouzon-mus er deformeret, hvilket forklarer, hvorfor mange børn med Crouzon syndrom har problemer med hørelsen.



Figur 9. Øverste række viser en model af et kranie af en normal gennemsnitsmus set fra tre forskellige vinkler, mens den nederste række viser en model af et kranie af en mus med Crouzon syndrom. Farven i et punkt på overfladen af den normale mus angiver afstanden fra punktet til det korrespondierende punkt på musen med Crouzon syndrom og vice versa. (Udlånt af Hildur Olafsdottir og 3D laboratoriet, Tandlægeskolen, Københavns Universitet).

Deformationsanalyse af hørekanalen

Moderne høreapparater bliver lavet ved, at man tager et aftryk af patientens øre. Dette aftryk scannes i en 3D-scanner for at få en computermodel af øret. Vha. et specielt designet CAD (Computer Aided Design) program modelleres høreapparatet med komponenter for at sikre, at der er plads til det. Til sidst printes høreapparatets skaller på en 3D printer – et såkaldt stereolitografisk apparat (SLA). De endelige skaller bliver derefter udstyret med den tilhørende elektronik. Da skallerne er hårde, passer de kun perfekt til øret i den position, som aftrykket er taget i. Forskning har påvist, at øret ændrer form med bevægelse af kæben og hovedet. Dette kan afprøves ved at sætte en finger i øret og bevæge kæben. For at analysere positionen og størrelsen af denne ændring i form er det nødvendigt at lave registrering af ørerne. På denne måde kan man præcist sige noget om, hvor øret ændrer form og hvor meget. Dette er vigtig information, når man laver høreapparater, det bruges til at optimere designet af bl.a. skaller og elektroniske komponenter. Figur 10 viser den samme ørekanal med fire forskellige farvekodninger, som angiver størrelsen af den lokale deformation, som følger af åben mund. I de områder, hvor ørekanalen er rød, er deformationen størst, og personen vil givetvis føle ubehag eller smerte i de områder, når munden er åben. Skallen kan dog slibes til i områder med meget deformation, og figurer som figur 10 giver præcis information om, hvor og hvor meget der skal slibes væk.



Figur 10. Deformation af hørekanalen relateret til graden af åben mund for et enkelt individ. Graden af åbenhed styres vha. antallet af bideblokker. (Udlånt af Sune Darkner).

Artiklens forfattere



Professor Rasmus Larsen



Ph.d. Mads Fogtmann Hansen

Bogen *Matematiske Horisonter* demonstrerer hvordan matematisk teori bliver omsat til praktisk anvendelse. Med en række historiske og moderne eksempler gennemgås matematikkens udvikling og fremskridt, og med udgangspunkt i så forskellige emner som blandt andet zoologi, cola-automater, robotter, cykelløb, Mars-landinger og skovbrande vises matematikkens enorme betydning for samfundet og for vores hverdag.

Matematiske Horisonter er skrevet af forskere og studerende på Danmarks Tekniske Universitet. Bogen tager udgangspunkt i faget matematik i gymnasiet, og til hvert kapitel er desuden udarbejdet flere opgaver. *Matematiske Horisonter* uddeles gratis som klassesæt til alle landets gymnasier og tekniske skoler, hvor den forhåbentlig vil give masser af inspiration til både elever og undervisere.

DTU Informatik og DTU Matematik tilbyder grupper og klasser at besøge universitetet, og denne mulighed beskrives nærmere på www.imm.dtu.dk & www.mat.dtu.dk, hvorfra den seneste version af *Matematiske Horisonter* ligeledes kan hentes.

